UNA STRATEGIA IN PIÙ PASSI PER LA TOMOGRAFIA A MICROONDE

G. Alfano[(1)], O. M. Bucci [(1,2)], L. Crocco [(2)], T. Isernia[(1)]

[1]DIET, Università di Napoli "Federico II", V.le Claudio, 21, 80125, Napoli

[2]IREA – CNR, Via Diocleziano 328 - 80124 Napoli

Abstract - *A novel step-wise strategy for solving inverse scattering problems is introduced and discussed. The basic idea is to divide the problem in several steps, each of them devoted to achieve partial information on the unknown scatterer(s). By so doing, one achieves a gradual knowledge of the solution through the solution of simpler auxiliary problems. The proposed procedure generalizes a previously presented two-step strategy, amounting to retrieve the (possibly) non convex support of the scatterers before solving the full inversion problem. In particular, we introduce and discuss the new steps, and report on progress achieved in the support estimation.*

1. INTRODUZIONE

È ben noto come i problemi inversi di diffusione presentino notevoli difficoltà di soluzione associate alla natura non lineare e mal-posta del legame tra dati ed incognite. Sia l'esigenza di pervenire ad un problema ben posto che la necessità di tentare di evitare possibili false soluzioni legate alla non linearità suggeriscono di cercare una rappresentazione finita dell'incognita con un numero di parametri che sia il più basso possibile. Sfortunatamente, non è generalmente noto quale sia la rappresentazione più idonea a contrastare in maniera ottimale ed al contempo mal-posizione e false soluzioni.

Risulta quindi di estremo interesse la circostanza che alcune proprietà significative del diffusore incognito, quali ad esempio il minimo cerchio che lo contiene o l'inviluppo convesso [1,2], possano essere ricavate in maniera relativamente semplice e senza dover esplicitamente risolvere il problema di ricostruzione. Tale circostanza suggerisce di scindere il problema in sotto-problemi più semplici. Viene quindi nel seguito proposta e discussa una strategia di soluzione in più passi. A tal scopo, viene preliminarmente introdotta nella Sez.2 una formulazione alternativa del problema di diffusione inversa basata su una "matrice di diffusione" opportunamente definita.

2. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA INVERSO TRAMITE MATRICE DI DIFFUSIONE

Riferendoci per semplicità al caso bidimensionale scalare, e assumendo l'asse z come asse di invarianza, per ogni illuminazione v ($v = 1,.....V$) le equazioni che governano la diffusione sono:

$$E_{inc}^{v} = \mathcal{A}_p\left(J_p^{v}\right), \tag{1.a}$$

$$E^{v} - E_i^{v} = \mathcal{A}_i\left(\chi E^{v}\right), \tag{1.b}$$

$$E_s^{v} = \mathcal{A}_e\left(\chi E^{v}\right). \tag{1.c}$$

dove la (1.a) lega, tramite l'operatore integrale $\mathcal{A}_p$ la v-ma sorgente primaria J_p^{v}, posta su una curva Γ, al campo incidente E_i^{v} all'interno della regione di indagine Ω. Nella (1.b) $\chi(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})/\varepsilon_b - 1$ rappresenta la funzione contrasto fra la permittività del diffusore, supposto isotropo e non magnetico, e quella del background, E^{v} è il campo totale in Ω ed $\mathcal{A}_i$ è l'operatore di radiazione interno. La (1.c) lega le correnti equivalenti indotte in Ω, rappresentate dal

prodotto χE^v, al campo diffuso E_S^v su Γ tramite l'operatore di radiazione esterno $\mathcal{A}_e$. Per semplicità sia le sorgenti primarie che le sonde di misura sono poste sulla stessa curva Γ.

Il problema inverso consiste nella determinazione della funzione contrasto a partire dalle misure del campo diffuso per ciascun campo incidente (anch'esso noto).

Osservando che gli operatori $\mathcal{A}_p$ e $\mathcal{A}_e$ sono compatti ed hanno lo stesso nucleo (a meno di uno scambio di ruolo fra variabili di osservazione ed integrazione) se ne può introdurre la Decomposizione ai Valori Singolari (SVD) mediante la tripla $\{u_n, \sigma_n\ v_n\}$ (n=1,..,N). Tale tripla rappresenta la SVD di $\mathcal{A}_e$ ed anche, scambiando il ruolo dellle funzioni u_n e v_n, quella di $\mathcal{A}_p$.

Per le proprietà della SVD (le v_n sono una conveniente base sia per le sorgenti primarie che per il campo diffuso, mentre le u_n lo sono per il campo incidente e le sorgenti indotte), si giunge a poter esprimere il campo diffuso nel punto $\mathbf{r}_m$ da una sorgente elementare primaria posta in $\mathbf{r}_p$ come:

$$E_s(\mathbf{r}_m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} S_n^h v_h(\mathbf{r}_m) v_n^*(\mathbf{r}_p) \tag{2}$$

in cui gli elementi della "matrice di diffusione" S possono essere valutati come:

$$S_n^h = \left\langle E_S^n(\mathbf{r}_m), v_h(\mathbf{r}_m) \right\rangle. \tag{3}$$

Nella (3), E_S^n è il campo diffuso corrispondente all'eccitazione primaria v_n, e < , > è il prodotto scalare. Noto il contrasto, gli elementi della matrice di diffusione possono anche essere espressi come

$$S_h^n = \sigma_n \sigma_h \left\langle \chi (I - \mathcal{A}_i \chi)^{-1} u_n, u_h \right\rangle. \tag{4}$$

Poiché una qualsiasi sorgente primaria può essere decomposta nella sovrapposizione di sorgenti elementari, la matrice S codifica in sé tutti i possibili esperimenti di diffusione. Ne consegue che il problema inverso di diffusione può essere formulato come quell0 di ricostruire il contrasto a partire dalla conoscenza degli elementi di S. Il fatto che solo un numero finito di elementi di S sia significativamente diverso da zero (a causa del comportamento a gradino dei valori singolari σ_n) è poi una possibile maniera per mettere in evidenza il carattere mal posto del problema.

3. POSSIBILE ARTICOLAZIONE DELLA STRATEGIA IN PIÙ PASSI

Nel seguito ci poniamo per semplicità nell'ipotesi che sia il dominio di indagine che quello di misura siano a simmetria circolare, e che sia le sorgenti primarie che le sonde di misura siano poste in zona lontana. Una possibile articolazione in più passi, a valle della quale implementare l'inversione vera e propria, è presentata nel seguito.

i) *Stima di centro e raggio del minimo cerchio che racchiude il sistema di diffusori*

Una riduzione della regione di indagine ha benefici effetti sia nel superamento del malcondizionamento che nell'eliminazione di false soluzioni, oltre che ovviamente sull'efficienza computazionale. A tal fine può utilizzarsi la semplice procedura riportata in [1], basata sull'analisi della "banda locale" dei campi diffusi, che è in grado anche di stimare l'inviluppo convesso del sistema di diffusori [2]. Tale procedura può essere immediatamente estesa alla matrice di diffusione quando si tenga presente [3] che i suoi elementi decadono esponenzialmente all'esterno di un quadrato di lato $P=2\beta a$, dove a è il raggio della minima circonferenza (centrata nell'origine) che contiene i diffusori. Tale circostanza già da sola consente di delimitare il dominio di indagine. D'altro canto, la matrice di scattering codifica in se tutti i possibili esperimenti di diffusione. Questo implica che, a partire dalla matrice di diffusione S nel riferimento assegnato, è possibile costruire la matrice di scattering relativa ad un qualsiasi altro riferimento centrato in un arbitrario punto (x',y') del dominio di indagine. Risulta in particolare:

$$S' = \mathrm{DFT}^{-1}\{\exp[j\beta x'(\cos\theta_i + \cos\theta_o) + j\beta y'(\sin\theta_i + \sin\theta_o)] \times \mathrm{DFT}[S]\}, \tag{5}$$

dove S' è la matrice di diffusione valutata in un sistema di riferimento centrato in (x',y') e le variabili θ_i e θ_o sono definite su Γ come $\theta_{i,o}=2\pi n/V$, con V pari al numero di illuminazioni e di misure.

Per S' valgono le stesse identiche considerazioni fatte per S. Se allora si determina il punto (x',y') tale che il corrispondente $P'=2\beta a'$ abbia valore minimo, si definiscono allo stesso tempo il centro (x',y') ed il raggio (a') del minimo cerchio che racchiude il diffusore.

ii) ***Valutazione del carattere con perdite o senza perdite del sistema di diffusori***

Una seconda interessante informazione che si può estrarre dalla conoscenza della matrice di diffusione, riguarda la determinazione del carattere con perdite o senza perdite del sistema di diffusori in esame. L'utilità di tale informazione risiede nel fatto che una preliminare determinazione dell'eventuale assenza di perdite consente, nella soluzione del problema inverso, una riduzione del 50% del numero di incognite. Come discusso in [4], ciò comporta notevoli vantaggi in termini di accuratezza ed affidabilità della ricostruzione finale.

Per procedere a tale determinazione, si consideri l'eccitazione costituita da una singola funzione singolare u_n nella geometria prescelta:

$$E_{inc}(\mathbf{r}) = a_m J_m(\beta r)\exp(jm\theta), \qquad m = 1,.....N \tag{6}$$

dove $a_m = C_m \sigma_m$, e le C_m sono costanti di normalizzazione per le funzioni singolari sinistre di $\mathcal{A}_{e,}$. Si può facilmente dimostrare che il corrispondente campo diffuso è dato da

$$E_S(\mathbf{r}) = \sum_{-N}^{N} S_n^m \Big/ H_n^2(\beta R_o) \exp(jn\theta) \tag{7}$$

con R_o raggio della circonferenza di misura. Sostituendo le espressioni dei campi totali all'interno dell'espressione della potenza P_m, uscente dalla regione di indagine, si ottiene $\forall m$ una funzione quadratica delle S_n^m, (n = 1,…..N). Visto che deve essere $P_m = 0$ in assenza di perdite, e $P_m < 0$ in presenza di perdite, l'osservazione delle P_m, (m = 1,…..N) consente di ottenere l'informazione cercata circa la presenza o assenza di perdite nel sistema di diffusori in esame.

iii) ***Stima del valor medio del contrasto***

In [5] è stato discusso nel dettaglio come il valor medio del contrasto giochi un ruolo cruciale ai fini del grado di non linearità di problemi di diffusione. E' stato inoltre mostrato come una sua stima off-line, usata come punto iniziale nell'inversione vera e propria, consenta di ottenere notevoli miglioramenti in termini di accuratezza ed affidabilità della ricostruzione. Nella formulazione adottata, si può procedere tenendo presente che, in un riferimento centrato, la matrice di diffusione relativa ad un cilindro omogeneo è puramente diagonale, come si può ricavare in base alle formule riportate in [6]. A valle della stima di centro e raggio, si può dunque affermare che, se S è diagonale, il diffusore è un cilindro omogeneo. In caso contrario, l'energia degli elementi esterni alla diagonale risulta un indice di quanto l'oggetto illuminato si discosta da un oggetto canonico quale un cilindro omogeneo. Si può inoltre stimare il valor medio del contrasto come

$$\chi_{medio} = \arg\min_{\chi} \|S_m - S(\chi)\|^2 \tag{8}$$

dove S_m è la matrice di diffusione misurata e $S(\chi)$ è una matrice diagonale esprimibile in forma chiusa [6]. Si noti che tale passo trae vantaggio dalla preliminare soluzione dei passi (i) e (ii).

iv) ***Stima del supporto (eventualmente non convesso e non connesso)***

La determinazione del supporto (eventualmente non convesso e/o non connesso) degli oggetti diffusori presenti nella regione di indagine può essere effettuata risolvendo un problema lineare ausiliario ed è una rielaborazione del cosiddetto "simple method" sviluppato in [7]. Nella

sua formulazione originaria, il simple method è basato sull'inversione di un'equazione integrale di Fredholm di prima specie. Come tale, esso stesso è un problema mal-posto e richiede, al fine di una corretta soluzione, l'introduzione di un'opportuna forma di regolarizzazione. Lo schema messo a punto in [8] è sostanzialmente basato sulle ben note proprietà di banda-limitatezza dei campi diffusi da oggetti di estensione finita e su una formulazione alternativa del problema che verte sulla già menzionata "matrice di diffusione".

Sfruttando tali strumenti è stato possibile pervenire ad una formulazione ben posta in spazi a dimensione finita che si è mostrata notevolmente robusta rispetto all'inevitabile presenza di errore sui dati. I risultati recentemente ottenuti includono l'individuazione della più conveniente tecnica di regolarizzazione del problema discreto nonché l'analisi teorica e numerica della risoluzione ottenibile, anche in confronto ad altre tecniche lineari di elaborazione. Si è inoltre raggiunta una migliore comprensione dei limiti di validità dell'approccio, e si è formulata un'estensione al caso multifrequenza.

Il passo finale di inversione tomografica è condotto tramite l'approccio bilineare descritto in [4], salvo il fatto che la funzione incognita è rappresentata mediante una rappresentazione wavelet. Infatti, grazie alle capacità di multi-risoluzione di tali basi, è possibile concentrare i coefficienti incogniti solo su quelle parti del dominio di indagine che sono effettivamente di interesse. Ciò è facilmente messo in pratica selezionando i coefficienti dell'espansione wavelet che corrispondono a tali sotto-domini. L'utilità della preventiva stima di supporto risiede dunque nella possibiltà di ridurre in maniera opportuna il numero complessivo dei parametri necessari a rappresentare la funzione incognita. Come noto, tale pratica ha benefici effetti sia sul grado di condizionamento del problema che sul problema dei minimi locali [5].

Il prosieguo della ricerca è finalizzato alla ottimizzazione dei singoli passi ed alla individuazione di altre possibili decomposizioni della catena di elaborazione complessiva. Una possibilità in tal senso è offerta dalla considerazione che la stima del supporto non convesso (ed eventualmente non connesso) può trarre decisivo vantaggio da una stima preliminare dell'inviluppo convesso.

RIFERIMENTI

[1] O.M. Bucci, A. Capozzoli, G. D'Elia , "A simple technique for determining the minimum circular envelope of radiating systems", IGARSS 2001, Sydney, Australia, July 2001.

[2] O.M. Bucci, A. Capozzoli, G. D'Elia, "An effective approach for determining the convex envelope of radiating or scattering systems", Proc. IEEE-APS Symposium, Boston, MA, 2001.

[3] O.M. Bucci, T. Isernia, 'Electromagnetic inverse scattering: retrievable information and measurement strategies" Radio Science, vol. 32, n.6, pp. 2123-2138, 1997

[4] T. Isernia, V. Pascazio, R. Pierri, "On the local minima in a tomographic imaging technique"; IEEE Trans. On Geoscience and Remote Sensing, Vol. 39, pp.1596-1607, July 2001.

[5] O.M.Bucci, N.Cardace, L. Crocco, T.Isernia; "Degree of non linearity and a new solution procedure in scalar 2-D inverse scattering problems"; JOSA-A, Aug; 2001 pp.1832-1843.

[6] D. S. Jones *Acoustic and Electromagnetic Waves*, England University Press, Oxford, UK, 1986.

[7] D. Colton, A. Kirsch, "A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region", Inverse Problems, **12**, No. 4, pp. 383-393, 1996.

[8] O.M.Bucci, L.Crocco, T.Isernia, "A novel two-step solution procedure in inverse scattering problems" , Proc. ICEAA, Torino, Italia, 2001.