# RICOSTRUZIONE DI FORME DI OGGETTI FORTEMENTE DIFFUSORI ATTRAVERSO MODELLI DISTRIBUZIONALI

Angelo Liseno, Rocco Pierri

Seconda Università di Napoli, Dip. di Ing. dell'Informazione
Via Roma 29, I 81031 Aversa (CE)
rocco.pierri@unina2.it

**Abstract**

*The reconstruction of the shape of "strongly scattering" objects from the knowledge of the scattered field is investigated. With reference to perfectly conducting cylinders, the provided formulation accommodates the distribution nature of the induced surface current density. Thus, as unknown representing the objects' contour, a single layer distribution is chosen so that the boundary of the scatterers is described by its support. The non-linear unknown-data mapping is linearized by means of the Kirchhoff approximation and the inversion is performed by an extended SVD approach.*

## INTRODUZIONE

La possibilità di ricostruire la forma di oggetti incogniti riscuote un rilevante interesse in una vasta gamma di applicazioni. Ricordiamo, a tal proposito, il Ground Penetrating Rarad (GPR) [1], il test non distruttivo di materiali [2] o ancora le applicazioni geofisiche [3].
In questo lavoro si focalizza l'attenzione sul problema della ricostruzione della forma di oggetti bidimensionali impenetrabili alla radiazione elettromagnetica, in particolare oggetti perfettamente conduttori [2,4,6-8]. La formulazione tiene in conto la natura distribuzionale delle correnti indotte dalla radiazione incidente sulla superficie degli oggetti attraverso l'utilizzo di distribuzioni a supporto compatto che abbiano supporto coincidente con il contorno degli oggetti stessi. In questa maniera, il contorno degli oggetti può essere cercato come il supporto di una distribuzione [4,6-8].
La formulazione del problema in esame, che verrà descritta nel successivo paragrafo, risulta essere non lineare a causa della non linearità del legame tra il campo diffuso e la distribuzione incognita che, attraverso il suo supporto, rappresenta la forma dell'oggetto. Allo scopo di semplificare tale legame, faremo due ipotesi. In primo luogo, supporremo che i cilindri siano sufficientemente distanziati tra di loro in modo da poter trascurare le loro mutue interazioni. Inoltre, assumeremo i raggi di curvatura dei cilindri sufficientemente più grandi della lunghezza d'onda in modo che punto per punto ciascun cilindro possa, da un punto di vista elettromagnetico, essere approssimato con il piano tangente. Linearizzeremo dunque, a seguito delle ipotesi sopra menzionate, il legame tra dati ed incognite facendo uso dell'approssimazione di Kirchhoff cosicché il problema potrà essere ricondotto all'inversione di un operatore lineare $\mathfrak{L}$ agente su uno spazio di distribuzioni.
L'inversione del suddetto legame lineare verrà affrontata attraverso l'utilizzo della Decomposizione ai Valori Singolari (SVD) dell'operatore $\mathfrak{L}$. In [6], è stata provata un'estensione della SVD di un operatore compatto ad operatori lineari distribuzionali. In questo lavoro viene fornito anche un esempio di applicazione della SVD per l'inversione

dell'operatore $\hat{\mathcal{L}}$ nel caso di dati raccolti in zona lontana sotto l'incidenza di onde piane multifrequenza con polarizzazione TM.

## FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Denotiamo con $\Omega$ l'unione delle sezioni trasverse (appartenenti al piano $xy$) di $N_c$ cilindri indefinitamente estesi lungo il loro asse, perfettamente conduttori, immersi nello spazio libero ed indichiamo con $\Gamma$ il contorno di $\Omega$. Come già anticipato, supporremo che i cilindri illuminati con onde piane aventi polarizzazione TM (ossia il campo elettrico incidente possiede un'unica componente nella direzione degli assi dei cilindri) ed ampiezza unitaria.
Introducendo la *distribuzione singolo strato* con densità $\varphi$, indicata con $\varphi\delta_\Gamma$, come

$$\iint_O \varphi(x,y)\delta_\Gamma(x,y)dO = \int_\Gamma \varphi(x,y)d\Gamma \tag{1}$$

dove $O$ rappresenta il *dominio da investigare*, l'unica componente (ossia quella lungo l'asse $z$) del campo elettrico diffuso al di fuori di $\Omega$ è data da [6]

$$E_s(k_0,\underline{r}) = -\frac{\omega\mu_0}{4}\iint_O \mathcal{J}H_0^{(2)}(k_0R)dO \tag{2}$$

dove $\underline{r}$ rappresenta il punto di misura del campo, $\omega$ è la pulsazione angolare di lavoro, $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ è il numero d'onda dello spazio libero, $\varepsilon_0$ e $\mu_0$ sono la permittività dielettrica e la permeabilità magnetica del vuoto, rispettivamente, $H_0^{(2)}(\cdot)$ è la funzione di Hankel di ordine zero e secondo tipo, $R = |\underline{r} - \underline{r}'|$, $J$ è la densità di corrente indotta sulla superficie degli oggetti e $\mathcal{J}$ denota la distribuzione $J\delta_\Gamma$. La distribuzione $\mathcal{J}$ soddisfa la seguente equazione [6]

$$\mathcal{J} = 2\underline{\mathcal{N}} \times \underline{H}_i \cdot \hat{i}_z + \frac{j}{2}\underline{\mathcal{N}} \cdot \underline{\nabla}\iint_O \mathcal{J}H_0^{(2)}(k_0R)dO \tag{3}$$

dove $\underline{H}_i$ è il campo magnetico incidente, $\underline{\mathcal{N}}$ denota la distribuzione vettoriale $\hat{n}\delta_\Gamma$, $\hat{n}$ è il versore normale uscente (vedi Figura 1) e $j$ è l'unità immaginaria. $E_s$ rappresenta i dati del problema che sono supposti acquisiti per diverse frequenze (*illuminazione multifrequenza*) ossia per diversi valori di $k_0$. Per quanto riguarda l'incognita, si osservi che $\underline{\mathcal{N}}$ dipende solo dal contorno $\Gamma$ della sezione trasversa dei cilindri, mentre $\mathcal{J}$ dipende anche dalla radiazione incidente. Inoltre, si noti che il contorno $\Gamma$ coincide con il supporto della distribuzione $\delta_\Gamma$, dove quest'ultima rappresenta una distribuzione singolo strato con densità unitaria, e che l'unione dei supporti di $n_x\delta_\Gamma$ e $n_y\delta_\Gamma$ coincide con $\Gamma$, dove $n_x$ ed $n_y$ sono le componenti lungo $x$ ed $y$ di $\hat{n}$, rispettivamente. Assumeremo, dunque, la distribuzione vettoriale $\underline{\mathcal{N}}$ come l'incognita che descrive la forma dei cilindri.

Si noti come la relazione tra il campo diffuso $E_s$ e la distribuzione incognita $\underline{\mathcal{N}}$ sia non lineare. Ciò può essere dedotto osservando che, a causa della (2), $E_s$ dipende da $\mathcal{J}$ che è anch'essa incognita e dipende, in virtù della (3), da $\underline{\mathcal{N}}$ e da sé stessa.

## MODELLO LINEARE ED INVERSIONE

Grazie all'approssimazione di Kirchhoff, il campo diffuso (2), normalizzato a fattori inessenziali, può essere riscritto in termini della distribuzione singolo strato avente densità $n_x \boldsymbol{U}(-n_x)$ come

$$E_s(k_0, \underline{r}) = \iint_O \mathcal{K}(k_0, \underline{r}; \underline{r}') n_x^{'} U(-n_x^{'}) \delta_\Gamma dO \tag{4}$$

dove $\mathcal{K}(k_0, \underline{r}; \underline{r}') = H_0^{(2)}(k_0 R) \exp(-jk_0 x')$.
In virtù della (4), il problema può essere riformulato come segue: "determinare la componente lungo $x$ della distribuzione vettoriale incognita $\underline{\mathcal{N}}$ relativamente alla zona illuminata".
Per quanto riguarda l'inversione, considereremo il caso in cui il campo diffuso $E_s$ sia collezionato nel settore angolare $\vartheta \in [\pi - \vartheta_M, \pi + \vartheta_M]$ (con $\vartheta_M \leq \pi$) della curva di osservazione circolare $\underline{r} = (r\cos\vartheta, r sin\vartheta)$ posta in zona lontana per un intervallo di frequenze tali che $k_0 \in [k_{0_{\min}}, k_{0_{\max}}]$. In questo caso, l'equazione (4) può essere riscritta, a seguito di un'ulteriore normalizzazione per fattori inessenziali, come

$$E_s(u, v) = \iint_O n_x^{'} U(-n_x^{'}) \delta_\Gamma e^{-j(ux'+vy')} dO \tag{5}$$

dove $u=k_0(1-cos\theta)$ e $v=-k_0 sin\theta$. Le inevitabili limitazioni introdotte dalla configurazione di misura assieme all'ambito di validità dell'approssimazione di Kirchhoff conducono ad una conoscenza incompleta di $E_s(u,v)$ che è dunque disponibile solo su di un dominio limitato del piano spettrale $(u,v)$. Il problema di determinare $n_x \boldsymbol{U}(-n_x)\delta_\Gamma$ dalla conoscenza incompleta del campo elettrico diffuso può essere dunque ricondotto all'inversione del seguente operatore

$$\mathcal{L} : n_x^{'} U(-n_x^{'}) \delta_\Gamma \rightarrow \iint_O n_x^{'} U(-n_x^{'}) \delta_\Gamma e^{-j(ux'+vy')} dO \tag{6}$$

Si noti che, come sottolineato in [6], la convergenza a zero dei valori singolari di $\mathcal{L}$ conduce ad una soluzione dell'equazione (9) che non dipende in maniera continua dai dati. Ciò significa che l'inevitabile presenza del rumore sui dati, a causa dell'errore di modello e di misura, produce soluzioni inaffidabili. Così, allo scopo di ottenere soluzioni stabili dell'eq. (9), l'impiego di qualche tecnica di regolarizzazione risulta necessaria. La regolarizzazione è qui ottenuta attraverso un taglio dei valori singolari (*SVD troncata*) [6] come

$$\mathcal{R}\, n_x^{'} U(-n_x^{'}) \delta_\Gamma = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_n} < E_s, v_n >_{L^2(s)} u_n \tag{10}$$

dove $\mathcal{R}\, n_x \boldsymbol{U}(-n_x)\delta_\Gamma$ è la soluzione regolarizzata e $\{\sigma_n, u_n, v_n\}$ è il sistema singolare di $\mathcal{L}$.
Mostriamo, per concludere, un esempio numerico riguardante la ricostruzione di un cilindro a sezione circolare e raggio $a$. Vi è considerato un dominio di investigazione rettangolare $O=[-x_M,x_M]x[-y_M,y_M]$, dove $x_M=y_M=2a$, $[k_{0_{\min}} a, k_{0_{\max}} a]=[2\pi a, 2\pi 3a]$ e $\theta_M=70°$. Il rapporto segnale rumore è supposto pari a *10dB*.
La Fig. 2 mostra la parte positiva di $-Re\{\mathcal{R}\, n_x \boldsymbol{U}(-n_x)\delta_\Gamma\}$ normalizzata rispetto al suo massimo poiché la densità della distribuzione $n_x \boldsymbol{U}(-n_x)\delta_\Gamma$ è a priori nota essere reale e positiva. I valori singolari di $\mathcal{L}$ sono stati tagliati con una soglia posta a *10dB* al di sotto del massimo valore singolare.

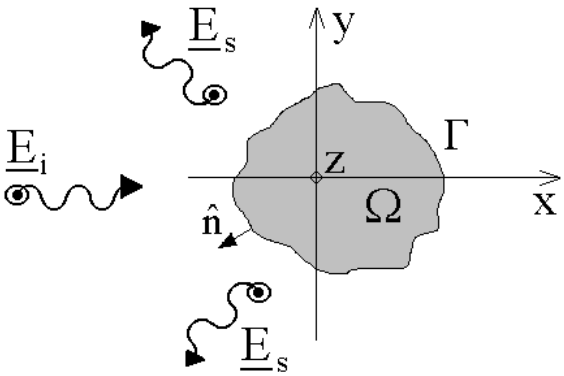


Fig. 1 – Geometria del problema

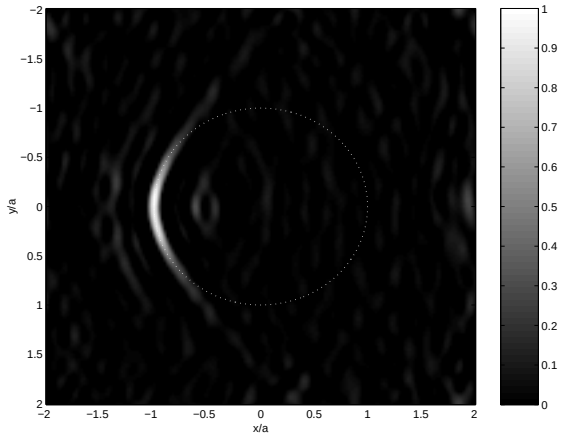


Fig. 2 - Ricostruzione del cilindro a sezione circolare perfettamente conduttore

## BIBLIOGRAFIA


1. R. Pierri, A. Liseno, R. Solimene, "Key points in microwave imaging", in *Subsurface Penetrating Radar*, D.J. Daniels Ed., IEE Press, 2003, in press.
2. K.J. Langenberg, "Elastic wave inverse scattering as applied to nondestructive evaluation", in *Inverse problems in scattering and imaging*, Bertero and Pike Eds., Bristol: Adam Hilger, 1992.
3. A.J. Devaney, "Geophysical diffraction tomography", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. GE-22, pp.3-13, Jan. 1984.
4. Y. Dai, E.J. Rothwell, K.M. Chen, D.P. Nyquist, "Time-domain imaging of radar targets using sinogram restoration for limited-view reconstruction", IEEE Trans. Antennas Prop., vol. 47, pp. 1323-1329, 1999.
5. V.S. Vladimirov, *Generalized functions in the mathematical physics*, Moscow: Mir, 1997.
6. A. Liseno, R. Pierri, "Imaging perfectly conducting objects as support of induced currents: Kirchhoff approximation and frequency diversity", J. Opt. Soc. Am. A, vol. 19, n. 7, Jul. 2002.
7. R. Pierri, A. Liseno, F. Soldovieri, "Shape reconstruction from PO multifrequency scattered fields via the Singular Value Decomposition approach", IEEE Trans. Antennas Prop., vol. 49, n. 9, pp. 1333-1343, Sept. 2001.
8. A. Liseno, "Shape reconstruction of strong scatterers by distributional models", Second University of Naples: Ph.D. Thesis, Dec. 2001.