I modi di Floquet nella diffusione da profili naturali

Giorgio Franceschetti, Antonio Iodice, Daniele Riccio, Giuseppe Ruello

Dipartimento di Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Università di Napoli "Federico II"
via Claudio 21 80125, Napoli
{gfrance, iodice, daniele.riccio, ruello}@unina.it

Abstract

The use of the Weierstrass Mandelbrot function as surface model allows the analytical evaluation of the scattered field in closed form. Such a result allows a theoretical comparison between the scattering solutions. In this paper a theoretical comparison between the Kirchhoff approximation and the extended boundary condition method is presented. Both the solutions are given as superposition of modes, whose amplitudes, directions of propagation and phases are compared in this paper.

INTRODUZIONE

L'introduzione della geometria frattale ha dotato la ricerca sulla diffusione da superfici naturali, i cui risultati erano spesso limitati da una insoddisfacente descrizione delle superfici in gioco, di uno strumento estremamente efficace. L'utilizzo della geometria frattale nei modelli di diffusione, infatti, ha consentito di migliorare i risultati che si erano ottenuti fino ad allora [1]. In particolare, la funzione di Weierstrass Mandelbrot (WM) ed il moto frazionario browniano (fBm) hanno mostrato di poter descrivere efficacemente le caratteristiche spettrali e di autosimiliarità tipiche delle superfici naturali e di poter essere impiegate con successo nei metodi elettromagnetici.

Partendo da ipotesi differenti, sono stati sviluppati diversi modelli elettromagnetici, i cui risultati sono stati per lo più confrontati per via numerica, facenso uso di simulazioni o di dati misurati. In questo lavoro si mostra come l'impiego della WM (che è una descrizione analitica della superficie) consente di ottenere soluzioni in forma chiusa per le statistiche di primo ordine del campo elettromagnetico diffuso. Con l'utilizzo della funzione di WM nasce dunque la possibilità di un confronto analitico tra i diversi modelli, che, muovendo da ipotesi differenti, non necessariamente convergono a risultati uguali. Disporre di uno strumento per un confronto analitico allarga enormemente la possibilità di approfondire i fenomeni fisici che sono alla base della diffusione del campo elettromagnetico.

Nel seguito si analizzano le soluzioni ottenute impiegando la funzione di WM con il metodo di Kirchhoff (KA) e con il metodo delle condizioni al contorno estese (EBCM). In entrambi i casi il campo diffuso risulta essere dato da una sovrapposizione di modi di Floquet generalizzati. In caso di bassa rugosità è possibile ottenere soluzioni in forma chiusa di facile lettura ed immediatamente paragonabili.

DESCRIZIONE DELLA SUPERFICIE

La funzione di WM è una sovrapposizione di toni sinusoidali, i cui periodi sono legati da un numero irrazionale. Nel seguito analizziamo il caso di funzione monodimensionale, limitata in banda, la cui espressione analitica è:

$$f(x) = a\sum_{n=0}^{M-1} C_n \boldsymbol{n}^{-Hn} \sin\left(k_0 \boldsymbol{n}^n x + \boldsymbol{f}_n\right), \tag{1}$$

dove a è un parametro di scala in ampiezza, k_0 è il tono fondamentale, $\boldsymbol{n}$(>1), irrazionale, è il parametro di scala in frequenza, H il coefficiente di Hausdorff, legato alla dimensione frattale Df dalla relazione $Df=2-H$, C_n e $\boldsymbol{f}_n$ sono coefficienti di ampiezza e di fase aleatori, M è il numero di toni, dipendente dalla minima e la massima frequenza che interagiscono con il campo elettromagnetico.

METODI ELETTROMAGNETICI

Nel seguito descriviamo i metodi elettromagnetici che intendiamo paragonare, nella loro formulazione che coinvolge l'uso della funzione di WM come strumento per la descrizione del profilo monodimensionale.

Metodo di Kirchhoff

Applicando il metodo di Kirchhoff, nell'ipotesi in cui il raggio di curvatura della superficie sia molto maggiore rispetto alla lunghezza d'onda incidente, e, adoperando il metodo delle piccole pendenze, è possibile esprimere il campo diffuso $\boldsymbol{E}_s$ come:

$$\begin{vmatrix} E_s^H \\ E_s^V \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{jk}{8\eth R}}\,\frac{X}{2}\exp(-jkR)\,\mathbf{S}\cdot D \begin{vmatrix} E_i^H \\ E_i^V \end{vmatrix}, \tag{2}$$

dove k è la lunghezza d'onda elettromagnetica, $\boldsymbol{E}_i$ il campo elettromagnetico incidente, R indica la distanza a cui si calcola il campo, gli apici H e V indicano la polarizzazione del campo incidente o riflesso, X è la lunghezza del profilo illuminato, $\mathbf{S}$ tiene in conto il comportamento polarimetrico, mentre nella valutazione dell'integrale D entrano in gioco le proprietà della superficie. Impiegando la funzione di WM (1), dopo una serie di passaggi matematici non banali [3], è possibile esprimere il campo diffuso come:

$$\begin{aligned} D(\cdot) = &\sum_{l_0,\ldots,l_{M-1}=-\infty}^{+\infty} \exp\left(j\sum_{n=0}^{M-1} l_n \boldsymbol{F}_n\right)\cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n}\left(k\left(\cos\boldsymbol{q}_i - \cos\boldsymbol{q}_s\right) a C_n \boldsymbol{n}^{-Hn}\right)\cdot \\ &\cdot \operatorname{sinc}\left[\left(k\left(\sin\boldsymbol{q}_i - \sin\boldsymbol{q}_s\right) + k_0\sum_{n=0}^{M-1} l_n \boldsymbol{n}^n\right) X/2\right]\cdot \end{aligned} \tag{3}$$

ovvero in termini di una sovrapposizione di modi di Floquet generalizzati, le cui ampiezze sono proporzionali ad una produttoria di funzioni di Bessel al cui interno compare il parametro di rugosità ka.

Metodo delle condizioni al contorno estese.

Il metodo delle condizioni al contorno estese è stato sviluppato sfruttando la proprietà della funzioni di WM di essere funzioni quasi periodiche. Questo consente di

generalizzare tecniche sviluppate per calcolare la diffusione da superfici periodiche, come appunto l'EBCM. Il campo diffuso può essere espresso come [4]:

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0,..,M-1}}^{+\infty} B_{\mathbf{l}} \exp\left(j\mathbf{k}_{\mathbf{l}}^{+} \cdot \mathbf{r}\right) \tag{4}$$

dove $\psi_s(\mathbf{r}) = E_y$ per polarizzazione TE, mentre $\psi_s(\mathbf{r}) = H_y$ per polarizzazione TM, dove il vettore $\mathbf{k}_{\mathbf{l}}^{+}$ identifica le direzioni di propagazione, ed è espresso dalla fomula:

$$\mathbf{k}_{\mathbf{l}}^{+} = k_{x\mathbf{l}}\hat{\mathbf{x}} + k_{z\mathbf{l}}\hat{\mathbf{z}} \tag{5}$$

$$k_{x\mathbf{l}} = k\sin\theta_{\mathbf{l}} = k\sin\theta_i + k_0 \sum_{n=0}^{M-1} l_n \eta^n \tag{6}$$

dove l'espressione (6) è detta equazione del reticolo. I coefficienti di ampiezza $B_{\mathbf{l}}$ sono invece forniti dall'espressione:

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}_2(\eta) \cdot \mathbf{W}_1^{-1}(\eta) \cdot \mathbf{A}, \tag{7}$$

dove **A** è il vettore delle ampiezze del campo incidente (se l'onda incidente è un'onda piana, **A** ha tutte componenti nulle tranne quella identificata da indice **l**=**0**),

$$\mathbf{W}_1(\eta) = \mathbf{Q}_N^{-} \cdot \eta \mathbf{T}_N^{+^{-1}} \mathbf{T}_D^{+} + \mathbf{Q}_D^{-}, \tag{8.a}$$

$$\mathbf{W}_2(\eta) = \mathbf{Q}_N^{+} \cdot \eta \mathbf{T}_N^{+^{-1}} \mathbf{T}_D^{+} - \mathbf{Q}_D^{+}, \tag{8.b}$$

e dove η èuguale ad 1 per polarizzazione TE mentre è uguale alla permittività relativa ε_r per polarizzazione TM.

Le matrici Q sono ancora espressse come combinazioni di funzioni di Bessel del tipo:

$$Q_{X,\mathbf{ql}}^{\pm} = (\mp 1)^{m(\mathbf{l})} (\mp 1)^{m(\mathbf{q})} A_X \cdot \exp\left(j\tilde{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n}\left(k_{z\mathbf{l}} a C_n \eta^{-Hn}\right), \tag{9}$$

dove:

$$A_X = \begin{cases} \dfrac{k}{k_{z\mathbf{l}}} & if \quad X = D \\ \dfrac{k^2 - k_{x\mathbf{l}} k_{x\mathbf{q}}}{k_{z\mathbf{l}}^2} & if \quad X = N \end{cases} \tag{10}$$

Le matrici di tipo T sono analoghe a quelle di tipo Q, con la differenza che al posto di $k_{z\mathbf{l}}$ va sostituito $k_{zt\mathbf{l}}$. Si noti che l'espressione (4) si riferisce al caso di diffusione da superficie di dimensione infinita. Se la superficie è finita il campo a grande distanza si esprime come:

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{k}{2\pi R}} \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0,..,M-1}}^{+\infty} B_{\mathbf{l}} \exp\left[j(kR - \pi/4)\right] \cos\theta_{\mathbf{l}} X \operatorname{sinc}\left[kX(\sin\theta_i - \sin\theta_{\mathbf{l}})/2\right] \tag{11}$$

PARAGONE TEORICO

I risultati mostrati nella sezione precedente consentono di effettuare il confronto utilizzando meri strumenti analitici, dal momento che entrambe le soluzioni ottenute sono espresse come sovrapposizione di modi generalizzati di Floquet.

In primo luogo si noti che le direzioni di propagazione dei modi sono coincidenti, come appare evidente dal confronto tra l'argomento della funzione sinc nell'eq.(3) e l'equazione di reticolo (6).
Per quanto riguarda le ampiezze dei modi, il confronto è meno immediato, dal momento che l'espressione generale dei modi, in entrambi i casi, è piuttosto complessa. Per ottenere informazioni utili, è però possibile effettuare un confrono per livelli di rugosità bassi. Quantitativamente parlando, questo significa che il parametro di rugosità *ka* deve essere tanto piccolo che nella prooduttoria di funzioni di Bessel l'unico termine che contribuisce al campo diffuso sia quello dato da funzion di Bessel di ordine 0. L'approssimazione di bassa rugosità può essere così descritta:

$$J_1(x_{\bar{n}})\prod_{\substack{n=0\\ n\neq\bar{n}}}^{M-1} J_0(x_n) << \prod_{n=0}^{M-1} J_0(x_n) \cong 1, \tag{12}$$

dove per il KA:

$$x_n = k(\cos\boldsymbol{q}_i - \cos\boldsymbol{q}_{\mathbf{l}})aC_n\boldsymbol{n}^{-Hn}, \tag{13}$$

mentre per l' EBCM:

$$x_n = k_{z\boldsymbol{l}}\, aC_n\boldsymbol{n}^{-Hn} \tag{14}$$

Pertanto il campo diffuso in queste ipotesi secondo il KA per polarizzazione oruizzontale si scrive come:

$$E_s^H = \sqrt{\frac{jk}{2\boldsymbol{p}R}}\exp(-jkR)R_H\cos\boldsymbol{q}_i X\,\mathrm{sinc}\left[kX\sin\boldsymbol{q}_i\right] \tag{15}$$

Per quanto riguarda l'EBCM, invece, contribuiscono alla diffusione solo i modi il cui indice $\boldsymbol{q}$ sia lo stesso dell'indice $\boldsymbol{l}$, pertanto tutte le matrici in gioco diventano diagonali.
Con opportuno procedimento analitico si ottiene l'espressione dei coefficienti di ampiezza B per polarizzazione orizzontale come:

$$B = -\frac{\cos\boldsymbol{q}_i - \sqrt{(k_t^2/k^2) - \sin^2\boldsymbol{q}_i}}{\cos\boldsymbol{q}_i + \sqrt{(k_t^2/k^2) - \sin^2\boldsymbol{q}_i}} = R_H \tag{16}$$

ovvero proprio il coefficiente di Fresnel. Pertanto, sostituendo la (16) nella (11), in cui **l=0**, si ottiene che il campo diffuso a grande distanza risulta esattamente uguale a quello dell'equazione (15). Ad un analogo risultato si giunge per polarizzazione verticale.
Le fasi a questo ordine di rugosità non entrano in gioco.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Franceschetti, A. Iodice, D. Riccio, " Fractal Models for Scattering from Natural Surfaces " in *Scattering*, ed. by R.Pike and P.Sabatier, Academic Press, London, U.K., 2000.

[2] L.Tsang, J.A.Kong, and R.T.Shin, *Theory of Microwave Remote Sensing*, a Wiley-Interscience Pubblication John Wiley&Sons, New York, 1985.

[3] G.Franceschetti, M.Migliaccio and D.Riccio, "An Electromagnetic Fractal-Based Model for the Study of Fading", *Radio Sci.*, vol. 31, pp. 1749-1759, 1996.

[4] G. Franceschetti, A. Iodice, D. Riccio, G. Ruello, "Fractal Surfaces and Electromagnetic Extended Boundary Conditions", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 40, pp. 1018-1031, May 2002.

[5] Savaidis S., P.Frangos, D.L. Jaggard, K. Hizanidis, "Scattering from fractally corrugated surfaces with use of the extended boundary condition method", *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 14, No.2, pp. 475-485, February 1997.

[6] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman & C., New York 1983.