

SVILUPPO DI FORMULE DI QUADRATURA PER EQUAZIONI INTEGRALI AL CONTO IN PRESENZA DI SPIGOLI CONDUTTORI O DIELETTICI

P. Burghignoli¹, L. Pajewski¹, F. Frezza¹, A. Galli¹ e G. Schettini²

(1) Università “La Sapienza” di Roma, Dipartimento di Ingegneria Elettronica
Via Eudossiana 18, 00184 Roma. E-mail: burghignoli@die.uniroma1.it

(2) Università “Roma Tre”, Dipartimento di Elettronica Applicata
Via della Vasca Navale 84, 00146 Roma. E-mail: g.schettini@uniroma3.it

Abstract

In this work we derive new two-dimensional quadrature formulas for the discretization of Boundary Integral Equations in the presence of conducting or dielectric edges. The proposed formulas allow us to exactly integrate polynomials of degree less than or equal to five, multiplied by an algebraic singular factor which diverges along one side of the triangular integration domain. This is the kind of singularity which occurs when physical edges are present in both conducting and dielectric bodies. Numerical tests are performed on the presented formulas, in order to validate the achieved improvement in accuracy, and examples are given of their application to the determination of radar cross section of three-dimensional metallic objects.

INTRODUZIONE

L'integrazione numerica di funzioni definite su domini bidimensionali è un passo necessario nella discretizzazione di equazioni integrali al contorno per problemi di radiazione e scattering che coinvolgono oggetti tridimensionali dielettrici e conduttori. Le incognite di queste equazioni integrali sono tipicamente le correnti superficiali equivalenti, elettriche e magnetiche, definite sulle interfacce fra mezzi diversi: tali correnti sono legate rispettivamente alle componenti tangenziali dei campi magnetici ed elettrici, e alcune di queste componenti, come è noto, possono divergere nelle vicinanze di uno spigolo conduttore o dielettrico [1].

Scopo di questo lavoro è la determinazione di formule di quadratura della classe di Radon [2] per triangoli planari, che costituiscono tipicamente i reticoli utilizzati per discretizzare le superfici di frontiera di oggetti tridimensionali. Le nuove formule qui proposte integrano esattamente polinomi di grado minore o uguale a cinque, moltiplicati per una funzione peso che diverge algebricamente lungo un lato del triangolo. Questo è il tipo di singolarità che presentano le componenti trasverse dei campi elettromagnetici in prossimità di uno spigolo, con un esponente di singolarità che dipende dall'angolo interno dello spigolo e dai parametri costitutivi dei mezzi coinvolti [3].

DERIVAZIONE DELLE FORMULE DI QUADRATURA

Le formule di quadratura consentono la valutazione di integrali multipli per mezzo di approssimazioni del tipo:

$$\int \dots \int_{R_n} w(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \cong \sum_{i=1}^N w_i f(x_{i1}, \dots, x_{in}) \quad (1)$$

dove R_n è una data regione in uno spazio n -dimensionale, $w(x_1, \dots, x_n)$ è una data funzione peso, (x_{i1}, \dots, x_{in}) sono i punti di quadratura e w_i sono i relativi pesi.

Ci proponiamo di determinare formule di quadratura per l'integrazione sul dominio triangolare R_2 mostrato in Fig. 1 di funzioni con singolarità algebrica su un lato del triangolo. Si considera quindi la funzione peso:

$$w(x, y) = \frac{1}{y^{1-\nu}} \quad (2)$$

essendo $0 \leq \nu < 1$. La costruzione delle formule è basata sulla determinazione di tre polinomi di terzo grado $P_{3,1}(x, y)$, $P_{3,2}(x, y)$ e $P_{3,3}(x, y)$, ortogonali su R_2 rispetto alla fissata funzione peso e linearmente indipendenti [2]. Ogni polinomio di questo tipo si può rappresentare come combinazione lineare dei quattro polinomi ortogonali di base $P^{i,j}(x, y)$. In particolare, per $P_{3,1}$ e $P_{3,2}$ si pone:

$$P_{3,1}(x, y) = \alpha_{30}P^{3,0}(x, y) + \alpha_{21}P^{2,1}(x, y) + \alpha_{12}P^{1,2}(x, y) + \alpha_{03}P^{0,3}(x, y) \quad (3)$$

$$P_{3,2}(x, y) = \beta_{30}P^{3,0}(x, y) + \beta_{21}P^{2,1}(x, y) + \beta_{12}P^{1,2}(x, y) + \beta_{03}P^{0,3}(x, y) \quad (4)$$

essendo:

$$P^{(i,j)}(x, y) = a_{00}^{(i,j)} + a_{10}^{(i,j)}x + a_{01}^{(i,j)}y + a_{20}^{(i,j)}x^2 + a_{11}^{(i,j)}xy + a_{02}^{(i,j)}y^2 + x^i y^j \quad (5)$$

con $i+j=3$. Affinché i polinomi cercati ammettano sette zeri comuni si richiede che essi verifichino la seguente condizione:

$$xP_{3,1}(x, y) + yP_{3,2}(x, y) = P_{3,3}(x, y) \quad (6)$$

I coefficienti che figurano nelle Eq. (3) e (4) vengono allora determinati imponendo che sia verificata l'Eq. (6) e che i polinomi cercati siano ortogonali rispetto a tutti i monomi di grado minore o uguale a due. I sette zeri comuni all'interno di R_2 , se distinti fra loro, possono essere utilizzati come punti di quadratura in una formula di integrazione del quinto ordine. I relativi pesi sono calcolati imponendo che la formula integri esattamente un insieme arbitrario di sette polinomi di grado minore o uguale a cinque.

RISULTATI NUMERICI

La procedura descritta è stata implementata numericamente e sono state sviluppate formule di quadratura per diversi esponenti di singolarità, relativi a spigoli conduttori e dielettrici con diversi valori della costante dielettrica e dell'angolo interno. In Tab. I sono riportati i punti di quadratura e i relativi pesi per uno spigolo perfettamente conduttore, con angolo interno $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$. Questi due casi si presentano rispettivamente nell'analisi di strutture stampate (ad esempio, antenne a patch) e in problemi di scattering da prismi conduttori (ad esempio, cubi o cilindri di altezza finita).

Sono stati effettuati vari test numerici, al fine di verificare l'accuratezza delle nuove formule e di confrontarla con quella delle principali formule già note in letteratura. In particolare, sono state considerate due classi di integrandi: funzioni algebriche e funzioni trigonometriche oscillanti, moltiplicate per la funzione peso singolare su un lato del dominio triangolare di integrazione; il caso delle funzioni oscillanti è particolarmente significativo in elettromagnetismo, a causa della presenza della funzione di Green e delle sue derivate spaziali nei kernel delle equazioni integrali utilizzate. In Fig. 2 è riportato il confronto fra l'errore relativo ε_{rel} commesso utilizzando

la nuova formula e altre formule note in letteratura per l'integrazione su R_2 della funzione oscillante (parte regolare della funzione di Green dello spazio libero):

$$\frac{e^{-jkR} - 1}{4\pi R} \quad (7)$$

moltiplicata per la funzione peso dell'Eq. (2) con esponente di singolarità $\nu = 2/3$. In Fig. 2(a), $|\varepsilon_{\text{rel}}|$ è mostrato in funzione della lunghezza normalizzata l/λ del cateto di R_2 (in cui $l = 1$), per la nuova formula e per altre due formule a sette punti: Radon standard [2] e Gauss-Legendre [4]. In Fig. 2(b), $|\varepsilon_{\text{rel}}|$ è mostrato in funzione di l/λ per la nuova formula e per altre due formule del quinto ordine: Gauss-Legendre [4] e Gauss-Jacobi [5]. In tutti i casi la nuova formula consente di ottenere significativi miglioramenti nell'accuratezza dell'integrazione, in special modo per triangoli con lati inferiori a λ (nei reticoli utilizzati per discretizzare superfici tridimensionali è tipicamente $l \leq 0.1\lambda$).

Le formule di quadratura proposte permettono di tener conto delle singolarità del campo nel metodo adottato per risolvere numericamente le equazioni integrali al contorno, ad esempio utilizzando opportune funzioni base vettoriali nel metodo dei momenti [1], oppure discretizzando direttamente gli operatori integrali al contorno nel metodo di Nyström [6]. Come esempio di applicazione delle nuove formule a questo secondo metodo, in Fig. 3(a) è riportata la sezione di scattering bistatica nel piano E per un cubo perfettamente conduttore di lato $a = 3\lambda/4$ (vedi Fig. 3(b)). Il confronto con i dati misurati in [7] mostra come la nuova formula migliori l'accuratezza dei risultati.

CONCLUSIONI

In questo lavoro sono state proposte nuove formule di quadratura su triangoli planari per l'integrazione di funzioni con singolarità algebrica su un lato del triangolo. I test numerici effettuati per classi significative di integrandi mostrano come l'uso delle nuove formule consenta di migliorare notevolmente l'accuratezza dell'integrazione rispetto alle formule disponibili in letteratura con uguale grado o numero di punti di quadratura. Le formule proposte sono state applicate a problemi di scattering, discretizzando le equazioni integrali al contorno col metodo di Nyström, e sono stati ottenuti risultati migliori di quelli precedentemente calcolati con formule standard.

Bibliografia

- [1] R. Sorrentino, Ed., *Numerical methods for passive microwave and millimeter wave structures*, New York, NY: IEEE Press, 1989.
- [2] H. Stroud, *Approximate calculation of multiple integrals*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.
- [3] J. Van Bladel, *Singular electromagnetic fields and sources*, Oxford, UK: Clarendon Press, 1991.
- [4] G. R. Cowper, "Gaussian quadrature formulas for triangles", *Int. J. Num. Methods in Eng.*, vol. 7, pp. 405-408, 1973.
- [5] P. Hillion, "Numerical integration on a triangle", *Int. J. Num. Methods in Eng.*, vol. 11, pp. 797-815, 1977.
- [6] P. Burghignoli, C. Di Nallo, F. Frezza e A. Galli, "Analysis of the scattering and radiation features of 3D arbitrarily shaped conducting and dielectric bodies based on a novel boundary integral equation approach", *Digest IEEE AP-S Int. Symp.*, Salt Lake City, UT, pp. 1822-1825, luglio 2000.
- [7] M. G. Cote, M. B. Woodworth e A. D. Yaghjian, "Scattering from the perfectly conducting cube", *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, vol. AP-36, pp. 1321-1329, settembre 1988.

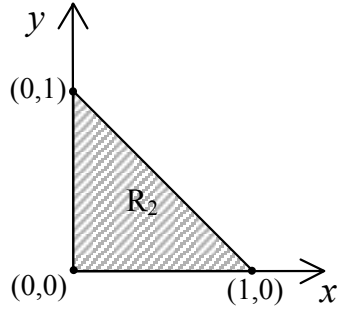


Fig.1 – Dominio di integrazione triangolare R_2 di riferimento.

	PEC, $\alpha = 0^\circ$ ($\nu = 1/2$)		PEC, $\alpha = 90^\circ$ ($\nu = 2/3$)	
	x	y	x	y
1	$x = 1.15022 \cdot 10^{-1}$	$y = 7.69956 \cdot 10^{-1}$	$x = 1.10032 \cdot 10^{-1}$	$y = 7.79937 \cdot 10^{-1}$
2	$x = 6.64463 \cdot 10^{-2}$	$y = 4.10423 \cdot 10^{-1}$	$x = 6.40256 \cdot 10^{-2}$	$y = 4.31902 \cdot 10^{-1}$
3	$x = 5.23131 \cdot 10^{-1}$	$y = 4.10423 \cdot 10^{-1}$	$x = 5.04073 \cdot 10^{-1}$	$y = 4.31902 \cdot 10^{-1}$
4	$x = 3.63636 \cdot 10^{-1}$	$y = 2.72727 \cdot 10^{-1}$	$x = 3.52941 \cdot 10^{-1}$	$y = 2.94118 \cdot 10^{-1}$
5	$x = 1.06941 \cdot 10^{-1}$	$y = 5.11156 \cdot 10^{-2}$	$x = 1.05027 \cdot 10^{-1}$	$y = 6.80983 \cdot 10^{-2}$
6	$x = 8.41944 \cdot 10^{-1}$	$y = 5.11156 \cdot 10^{-2}$	$x = 8.26875 \cdot 10^{-1}$	$y = 6.80983 \cdot 10^{-2}$
7	$x = 4.86376 \cdot 10^{-1}$	$y = 2.72470 \cdot 10^{-2}$	$x = 4.81145 \cdot 10^{-1}$	$y = 3.77105 \cdot 10^{-2}$

Tab. I – Coordinate e pesi dei punti di quadratura per spigoli conduttori di angoli interni $\alpha = 0^\circ$ e 90° .

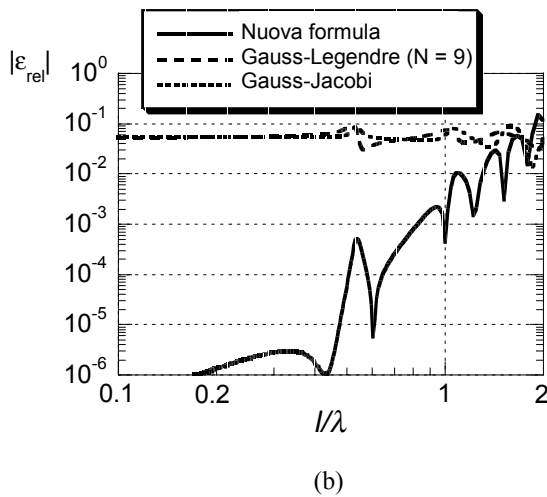
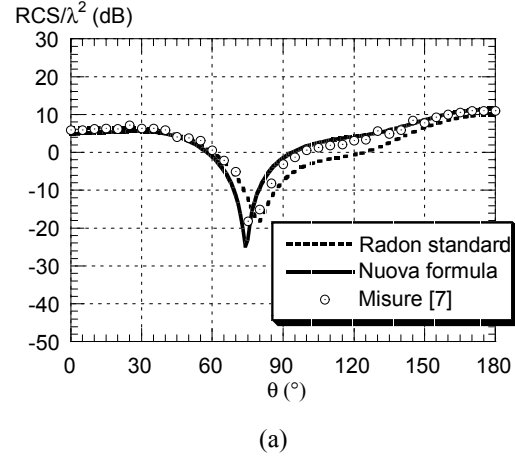
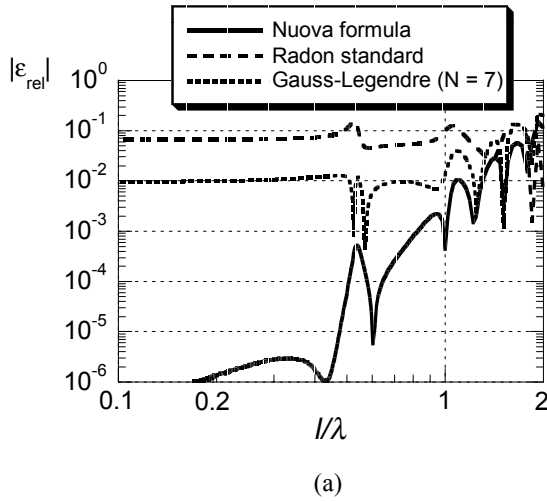


Fig. 2 – Errore relativo ε_{rel} in modulo per l'integrazione pesata della funzione dell'Eq. (7), in funzione della lunghezza normalizzata del cateto l/λ , con $\nu = 2/3$.

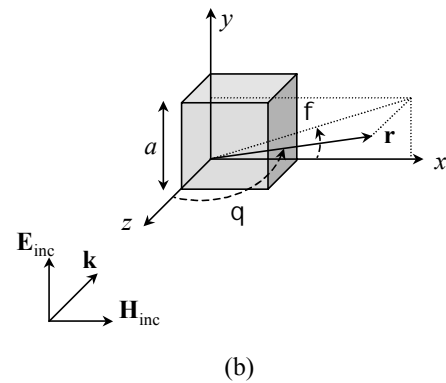


Fig. 3 – (a) Sezione di scattering bistatica (RCS) nel piano E ($\phi = \pi/2$), normalizzata rispetto a λ^2 e in dB, per un cubo PEC di lato $a = 3\lambda/4$, in funzione dell'angolo θ . (b) Geometria del cubo PEC illuminato da un'onda piana con incidenza normale.