UN METODO IBRIDO MODE MATCHING /FEM PER L'ANALISI DI COMPONENTI IN GUIDA D'ONDA E SUPERFICI SELETTIVE IN FREQUENZA DI TIPO INDUTTIVO

D. Arena[*], P. Grassi[+*], M. Ludovico[*], G. Manara[+], A. Monorchio[+]

[(*)] Telecom Italia Lab -Via G. Reiss Romoli, 274 – 10148 Torino, Italy

[(+)] Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Pisa, Pisa, Italy

[(*)] domenico.arena, paolo.grassi, michele.ludovico@tilab.com

[(+)] p.grassi, g.manara, a.monorchio@iet.unipi.it

Abstract

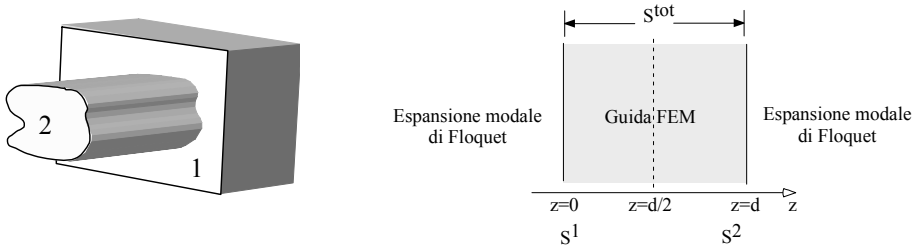
A hybrid Mode Matching-Finite Element (MM-FE) technique is derived for the analysis of waveguide discontinuities and thick screen inductive frequency selective surfaces (FSSs). The hybrid method combines the FE capability to analyze irregular structures with the numerical efficiency of the MM, retaining the advantages of both methods. Moreover, edge elements are used for vectorial interpolation of transverse fields over an arbitrary cross-section, avoiding the problem of spurious solution. Floquet modes are used to expand electromagnetic fields for periodically perforated FSSs. The scattering parameters are evaluated via the GSM method. A spectral criterion involving the average length of the edges is employed to carry out an efficiently modal selection. Comparisons with reference data are shown to prove the effectiveness of the method.

INTRODUZIONE

Grazie alla sua efficienza numerica, la tecnica del *Mode Matching(MM)* è ormai largamente utilizzata nell'analisi e nel progetto di numerosi dispositivi in guida d'onda, riconducibili alla connessione in cascata di discontinuità in guida, separate da spezzoni di guide d'onda per cui è nota *a priori* l'espansione modale sulla sezione trasversa. D'altra parte, il Metodo degli Elementi Finiti (*Finite Element Method*, FEM), pur presentando un onere computazionale non trascurabile, consente di ricavare l'espansione modale dei campi trasversi in guide d'onda di sezione arbitraria, per le quali non è nota l'espressione analitica del campo elettromagnetico. In particolare, viene proposta un'interpolazione vettoriale dei campi trasversi (*Transverse Vector Field Equation*, TVFE) le funzioni di spigolo di Whitney, le quali imponendo la sola continuità delle componenti tangenziali sugli spigoli a comune degli elementi finiti, permettono di eliminare il problema delle soluzioni spurie, che invece si manifesta adottando un'interpolazione scalare dei campi vettoriali. Il metodo ibrido MM/FEM presentato, mantenendo i vantaggi di entrambi i metodi consente l'analisi efficiente di dispositivi composti da una cascata di discontinuità e di spezzoni di guide d'onda di sezione arbitraria. La stessa tecnica ibrida può essere efficacemente utilizzata per analizzare superfici selettive in frequenza (*Frequency Selective Surface*, FSS) induttive realizzate mediante schermi spessi perforati periodicamente. In particolare, l'espansione modale del campo all'interno dei fori viene raccordata con l'espansione modale del campo in aria. Quest'ultima è rappresentata in termini di armoniche di Floquet che, a partire dall'analisi di una singola discontinuità aria-foro, consentono di ricavare i parametri dell'intera struttura periodica.

FORMULAZIONE DEL METODO

Si consideri, per semplicità, la geometria mostrata in Fig.1a in cui è rappresentata una discontinuità di tipo *boundary reduction* fra una guida d'onda (regione 1) a sezione regolare (di cui sono note *a priori* espressioni modali dei campi) ed una a sezione arbitraria (regione 2).



(a) **(b)**

Fig. 1: Geometria del problema (a) e struttura della GSM per una FSS (b).

L'applicazione del metodo della Matrice di Scattering Generalizzata (*Generalized Scattering Matrix* - GSM) alla discontinuità sopra specificata prevede il calcolo della matrice degli accoppiamenti modali e delle matrici di potenza secondo la procedura proposta in [4]:

$$C_{m,n} = \iint_{S_2} \left(\underline{e}_n^i \times \underline{h}_m^{j*} \right) \cdot \hat{z} \; dS, \; P_n^i = \iint_{S_{1,2}} \left(\underline{e}_n^i \times \underline{h}_n^{i*} \right) \cdot \hat{z} \; dS. \qquad i, j = \{1,2\} \,, \tag{1}$$

dove $\hat{z}$ indica la direzione longitudinale nelle guide, S_i la sezione della guida i-esima, $\underline{e}_n$ e $\underline{h}_n$ rappresentano le autofunzioni elettriche e magnetiche per il modo *n*-esimo della guida *i*-esima. La distribuzione del campo elettromagnetico nella regione 1 è nota in forma analitica ed in particolare, coincide con le autofunzioni di una guida d'onda regolare oppure con l'espansione di Floquet dei campi in aria. Nella guida di sezione irregolare che insiste sulla regione 2, i campi trasversali sono ricavati mediante il FEM. Consideriamo l'equazione d'onda per il campo elettrico:

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{\nabla}_t \times \vec{E} - \left(k_0^2 - \beta^2 \right) \vec{E} = 0 \tag{2}$$

dove $\vec{\nabla}_t$ denota il gradiente sul piano trasverso, k_0 la costante di propagazione in aria, β la costante di fase lungo $\hat{z}$ e $\vec{E}$ il campo elettrico trasverso. A partire da una discretizzazione triangolare del dominio computazionale (*elementi finiti*), si rappresenta il campo su ciascun elemento come somma di funzioni di base vettoriali, nel nostro caso le funzioni di Whitney. Attraverso la cosiddetta *forma debole* della (2) ed effettuando una proiezione delle equazioni involute su un *set* di funzioni di test, scelte coincidenti con la base di rappresentazione (Metodo di Galerkin), si ottiene il sistema risolvente (3) la cui soluzione si riduce ad un problema agli autovalori generalizzato (*Generalized Eigenfunction Problem*):

$$\underline{\underline{K}}_{\nabla} \cdot \underline{E} = \gamma^2 \underline{\underline{K}} \cdot \underline{E} \tag{3}$$

con gli elementi delle matrici dati da:

$$k_{\nabla ij} = \iint_{S_2} \left(\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_j \right) dx\, dy \,, \quad k_{ij} = \iint_{S_2} \vec{W}_i \cdot \vec{W}_j \, dx\, dy, \tag{4}$$

dove i, j sono indici associati ai singoli spigoli della mesh e $\vec{W}_i$ indica la funzione vettoriale di Whitney relativa allo spigolo i-esimo. Inoltre gli autovalori γ^2 corrispondono al quadrato dei numeri di cut-off dei modi, mentre gli autovettori associati si riferiscono esplicitamente alla distribuzione del campo trasverso sugli spigoli della *mesh.*

Si noti che l'impiego delle funzioni di spigolo garantisce automaticamente la continuità dei campi fra gli elementi della *mesh.* Essendo inoltre le funzioni di Whitney a divergenza nulla (ciò assicura la stessa proprietà anche per il campo trasverso), il problema delle soluzioni spurie è automaticamente eliminato. Per imporre la condizione al contorno di Dirichlet è sufficiente annullare il campo elettrico sugli spigoli di bordo, riducendo la dimensione del problema al numero di *edge* interni. Nel caso duale (campo magnetico), invece, la dimensione del problema risulta pari al numero globale di *edge* diminuito degli eventuali *egde* giacenti su pareti magnetiche. La procedura FEM implementata, ricavando direttamente i campi trasversi elettrico e magnetico, rispettivamente per i modi *TE* e *TM*, permette il calcolo immediato degli integrali di accoppiamento raggruppati in famiglie modali *TE* e *TM*:

$$\begin{aligned} C_{m,n}^{TE/TE} &= Y_{m,n}^{1\,TE^*} \iint_{S_2} \underline{e}_n^2 \cdot \underline{e}_m^{1\,*}\, dS, \quad C_{m,n}^{TM/TM} = Y_{m,n}^{1\,TM^*} \iint_{S_2} \underline{h}_n^2 \cdot \underline{h}_m^{1\,*}\, dS, \\ C_{m,n}^{TE/TM} &= \iint_{S_2} \underline{e}_n^2 \cdot \left(\underline{h}_m^{1\,*} \times \hat{z} \right) dS, \quad C_{m,n}^{TM/TE} = Y_{m,n}^{1\,TE^*} \iint_{S_2} \underline{h}_n^2 \cdot \underline{h}_m^{1\,*}\, dS. \end{aligned} \tag{5}$$

Un procedimento del tutto analogo può essere ripetuto per la determinazione delle matrici di potenza che insieme alla matrice degli accoppiamenti consentono di ricavare i parametri S della singola discontinuità. Il dispositivo completo può essere analizzato mediante la connessione in cascata delle discontinuità che lo compongono, tenendo in conto eventuali traslazioni dei piani di riferimento.

In particolare, i parametri S di una FSS realizzata mediante uno schermo periodico, in accordo con il teorema di Floquet, possono essere ricavati analizzando la sola cella elementare. La configurazione ottenuta è rappresentata in Fig. 1b, dove S^1 indica la GSM della discontinuità aria-guida con piano di riferimento posizionato a metà dello schermo e S^2 la GSM dell'interfaccia guida-aria, ricavata dalla S^1 per complementarità.

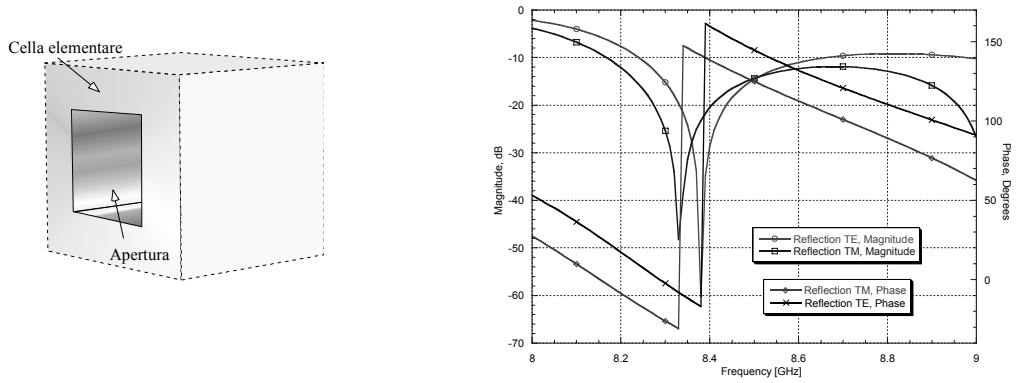
La selezione modale è stata effettuata implementando il ben noto *criterio spettrale,* che prevede l'impiego di funzioni che consentono una equivalente variabilità dei campi rispetto allo spazio in entrambe le regioni accoppiate.

RISULTATI NUMERICI

Consideriamo come primo esempio la cella di periodicità dello schermo in [5], riportata in Fig.2a. L'analisi è stata effettuata ricorrendo ad una mesh di 558 elementi. E' stato inoltre selezionato un $k_t^{\max} = 0.9165\, mm^{-1}$ che corrisponde a 40 modi in guida ed a 68 modi di Floquet. La Fig.2b mostra l'ampiezza e la fase dei coefficienti di riflessione per i modi TE e TM, che risultano in accordo con quelli riportati in [5].

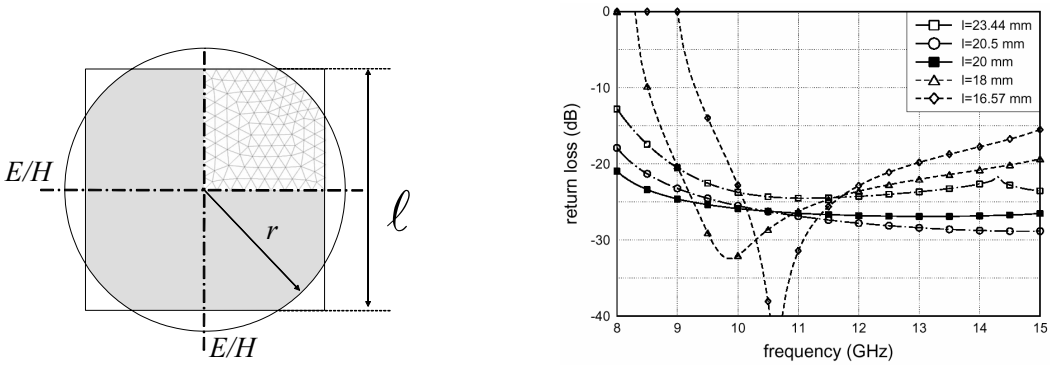
Come seconda applicazione della tecnica proposta viene considerata una transizione tra una guida d'onda quadrata ed una guida d'onda circolare (Fig. 3). Imponendo la stessa impedenza caratteristica per il modo fondamentale in entrambe le guide, al fine di ottenere la massima banda possibile di adattamento, si trova $r = \rho' \ell / \pi$ con r raggio della guida circolare, ℓ lato di quella quadrata e ρ' primo zero della derivata prima

della funzione di Bessel del primo ordine. E' importante osservare che il problema sotto analisi rientra nella categoria dei problemi *mixed- boundary,* dato che le due guide sono connesse attraverso un'apertura di forma irregolare. Il problema viene efficientemente risolto, tramite la tecnica ibrida MM/FEM proposta in questo lavoro. In particolare, i risultati riportati in Fig. 3b sono in ottimo accordo con dati di riferimento presenti precedentemente in letteratura.



(a) **(b)**

Fig. 2:- Schermo metallico spesso con fori rettangolari: a) geometria della cella di periodicità; b) ampiezza e fase dei coefficienti di riflessione.



(a) **(b)**

Fig. 3: Transizione fra una guida d'onda quadrata ed una guida circolare:a) geometria del problema; b) andamento del return loss in funzione del parametro l.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] D. Arena, M. Ludovico, G. Manara, and A. Monorchio, "Analysis of waveguide discontinuities using edge elements in a hybrid mode matching/finite elements approach", *Microwave and Wireless Components Letters, IEEE ,* Volume: 11, Issue: 9 , pp 379-381 Sept. 2001.

[2] J. Rubin, H. L. Bertoni "Reflection from a periodically perforated plane using a subsectional current approximation", pp. 829-836 ", *IEEE Trans. on AP*, Vol. AP-31, n.6, pp. 829-836, Nov. 1983.

[3] G. Manara, A.Monorchio, P.Grassi "Analysis of Thick-Screen Inductive FSSs Using a Hybrid Mode Matching-Finite Elements Approach with Edge Elements", Presented at the *XXVIIth General Assembly of the International Union of Radio Science,* Maastricht, Olanda, 17-24 Agosto 2002

[4] A. S. Omar, K.Schüneman, "Transmission Matrix Representation of Finline Discontinuities;" *IEEE Trans. on MTT*, Vol.33, n.9, pp.765-770, Sept. 1985.

[5] J.C. Chen "Analysis of Thick Dichroic Plate with Rectangular Holes at Arbitrary Angles of Incidence". *TDA Progress Report 42-104, Ground Antennas and Facilities Engineering Group,* February 15, 1991