Doppia Diffrazione da una Coppia di Diedri Arbitrariamente Disposti (Non Necessariamente Coplanari)

Matteo Albani

malbani@ingegneria.unime.it
Dip. Fisica della Materia e Tecnologie Fisiche Avanzate, Università di Messina, salita Sperone 31, 98166 Messina

Abstract

In questo articolo viene presentata una descrizione analitica ed in forma chiusa, da inquadrarsi nel contesto della Teoria Geometrica Uniforme della Diffrazione (UTD), per il fenomeno della doppia diffrazione elettromagnetica da una coppia di diedri (wedges) di dislocazione arbitraria. In particolare si rimuove l'ipotesi limitante, presente in tutta la letteratura precedente, che gli spigoli dei due diedri giacciano sullo stesso piano. Tale risultato viene conseguito costruendo il campo doppiamente diffratto (DD) dalla coppia di diedri attraverso una tecnica di sintesi spettrale. Il campo così ottenuto, in forma di doppio integrale spettrale, viene valutato asintoticamente in maniera uniforme mediante l'uso di funzioni di transizione già note nei problemi di doppia diffrazione, esprimibili in termini di Integrale di Fresnel Generalizzato (GFI). L'espressione finale è strutturata in linea con la descrizione a raggi della UTD e contiene un coefficiente diadico di doppia diffrazione uniforme. Viene poi analizzato il comportamento della soluzione nei casi limite per dimostrare come il contributo di campo DD compensi esattamente la discontinuità prodotta sul campo totale dall'oscuramento dei raggi singolarmente diffratti da un diedro, ad opera dell'altro diedro, in corrispondenza dei confini d'ombra. Tale verifica analitica è supportata da esempi numerici.

Introduzione

I metodi a raggi costituiscono lo strumento più valido per la determinazione del campo elettromagnetico quando gli oggetti reirradianti risultano elettricamente grandi. Tale approccio permette la soluzione sia di problemi di scattering (determinazione della sezione radar di velivoli, navi ecc., problemi di installazione di antenne in ambienti operativi quali satelliti, velivoli, navi ecc.) sia di problemi di propagazione (determinazione delle mappe di copertura, di interferenza, della compatibilità dei livelli di campo con le norme di legge in prossimità dei trasmettitori). L'evoluzione della potenza di calcolo informatica ha permesso la realizzazione di potenti strumenti software CAD che, modellizzando lo scenario geometrico sotto esame, permettono di tracciare i raggi che, partendo da una o più sorgenti, interagiscono con lo scenario e concorrono alla determinazione del campo elettromagnetico in un qualsiasi punto dello spazio. Attraverso la UTD [1] è possibile calcolare il contributo di campo pertinente a ciascun raggio, sulla base di semplici formule chiuse che coinvolgono i parametri geometrici del raggio e la forma locale dell'oggetto reirradiante nel punto in cui viene colpito dal raggio. Modellizzando le superfici degli oggetti mediante piastre piane tra loro interconnesse, i meccanismi di reirradiazione risultano essere: la riflessione, la diffrazione (singola) dallo spigolo di un diedro e, volendo spingere l'accuratezza della descrizione ad ordini superiore, la diffrazione dal vertice di una piramide e la doppia diffrazione da una coppia di diedri. In molte applicazioni pratiche, quando i campi dominanti dei raggi singolarmente diffratti sono oscurati o sono prossimi all'oscuramento, l'introduzione dei raggi DD diventa indispensabile. È piuttosto noto che l'applicazione in cascata dei coefficienti ordinari di diffrazione UTD perde di validità quando lo spigolo del secondo diedro è posto nella regione di transizione del primo diedro. Questo è dovuto alla repentina variazione spaziale ed al comportamento non assimilabile ad un raggio del campo diffratto dal primo diedro che incide sul secondo. È pertanto necessario sviluppare un coefficiente di diffrazione doppia che tenga conto in modo uniforme delle possibili transizioni, tale coefficiente deve essere derivato dallo studio di un opportuno problema canonico.

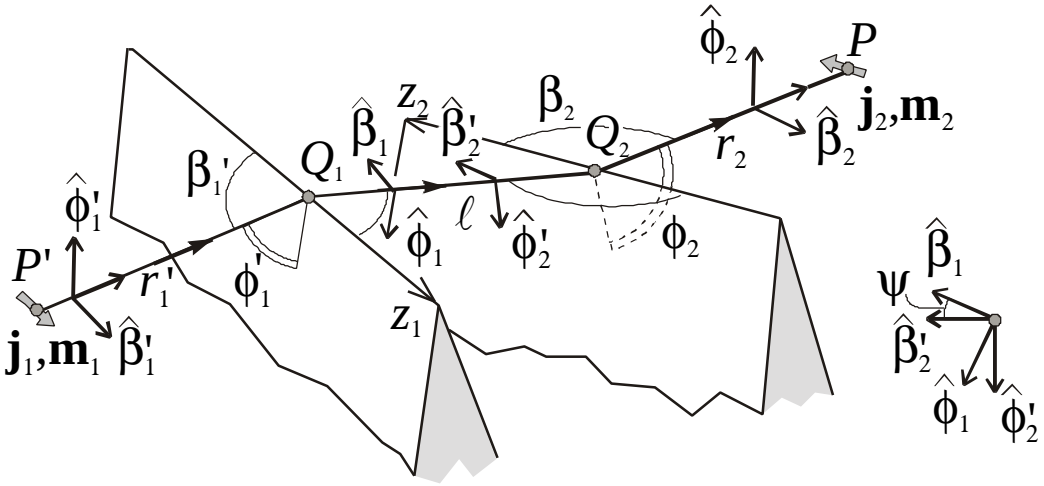

Fig. 1 Geometria della coppia di diedri e sistemi di riferimento *rayfixed*

Il problema della diffrazione da due bordi paralleli è stato investigato ampiamente nel passato; in particolare sono studiate: la strip, la coppia di semipiani paralleli ecc.. Tali risultati sono stati inseriti nell'ambito della UTD in [2] dove è stato ottenuto un coefficiente di doppia diffrazione per la struttura generale del doppio diedro, usando un'estensione spettrale della UTD, valido per onda piana incidente ed osservazione in campo lontano. In [3] e in [4], tale risultato, essenzialmente bidimensionale perché relativo ad un problema cilindrico, è stato esteso al caso più generale di doppia diffrazione da una coppia di diedri con spigoli coplanari ma obliqui. I due risultati, pur ottenuti con formulazioni diverse, risultano equivalenti e sono applicabili per sorgente ed osservazione poste a distanza finita dai diedri. Per la descrizione uniforme delle transizioni a cui è soggetto il campo DD si introducono delle funzioni di transizione che coinvolgono l'integrale di Fresnel generalizzato [5]. Infine in [6] e [7] si propone una soluzione ulteriormente perfezionata che, pur mantenendo lo stesso campo di applicabilità di [3] e [4], tratta accuratamente anche il caso particolare, ma di estremo interesse pratico, in cui i due spigoli diffrangenti sono uniti da una faccia a comune. Il risultato proposto nel presente lavoro permette di estendere il campo di applicazione al caso generale in cui gli spigoli dei due diedri non siano necessariamente coplanari. Il risultato ottenuto rappresenta la naturale generalizzazione di [7] e la comprende come caso particolare qualora gli spigoli dei due diedri giacciano sullo stesso piano. L'espressione finale è strutturata come prescritto dalla UTD e contiene un coefficiente diadico di doppia diffrazione uniforme che gestisce le transizioni di campo attraverso le funzioni di transizione già introdotte in [6]. Al di fuori delle regioni di transizione la descrizione del campo coincide con quella prodotta dall'applicazione della Teoria Geometrica della Diffrazione (GTD).

Formulazione

Per descrivere convenientemente il campo DD in un generico punto di osservazione P, prodotto da una sorgente sferica posta in P', si introducono i sistemi di riferimento solidali con il raggio (*ray-fixed* [1]) con origine nei centri di doppia diffrazione Q_1 e Q_2 mostrati in Fig. 1. Poiché i due spigoli non sono coplanari, tra la coppia di versori di "uscita" della prima diffrazione $\hat{b}_{12}$, $\hat{f}_{12}$ e la coppia dei versori di "entrata" della seconda diffrazione $\hat{b}'_{12}$, $\hat{f}'_{12}$ si definisce un angolo di "avvitamento" y (vedi il dettaglio in basso a destra di Fig. 1). Per mezzo di tali sistemi di riferimento il campo DD può essere espresso nella tipica forma a raggi

$$\mathbf{E}^{dd}(P) = \mathbf{E}^{i}(Q_1)\cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{dd} \frac{\sqrt{r_1'}}{\sqrt{\ell r_2}\sqrt{r_1'+\ell+r_2+\frac{r_1' r_2}{\ell}\sin^2 y}}\, e^{-jk(\ell+r_2)} \tag{1}$$

come prodotto tra il campo incidente nel primo centro di diffrazione ed un coefficiente diadico di doppia diffrazione

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{dd} = D^{dd}_{b_1' b_2}\hat{b}_1'\hat{b}_2 + D^{dd}_{b_1' f_2}\hat{b}_1'\hat{f}_2 + D^{dd}_{f_1' b_2}\hat{f}_1'\hat{b}_2 + D^{dd}_{f_1' f_2}\hat{f}_1'\hat{f}_2 \tag{2}$$

oltre ad un opportuno fattore di *spreading* e al fattore di propagazione. Per calcolare l'espressione del coefficiente diadico di diffrazione adottiamo una tecnica di sintesi spettrale. Dal momento che non è disponibile una soluzione esatta per il problema canonico della coppia di diedri, calcoliamo dapprima il campo diffratto dal primo diedro. Tale campo può essere espresso come sovrapposizione dei campi irradiati nello spazio libero da una distribuzione di sorgenti spettrali. Calcolando il campo diffratto sul secondo diedro da ciascuna sorgente spettrale, e sovrapponendo tutti i contributi, otteniamo una descrizione del campo doppiamente diffratto. Inoltre, per rendere la formulazione più semplice, ricaviamo uno solo dei quattro termini costituenti la diade alla volta. Consideriamo quindi il caso in cui la sorgente illuminante sia costituita da un dipolo elettrico di intensità $\mathbf{j}_1 = I_1\hat{z}_1$; tale illuminazione $\mathbf{E}^{i}(P) = \frac{z}{jk}\left(k^2 + \nabla_P \nabla_P \cdot\right)\frac{e^{-jk|P-P'|}}{4p|P-P'|} I_1\hat{z}_1$, di tipo TM_{z_1} eccita solo i primi due termini della diade (2). Il campo diffratto dal diedro 1, di angolo esterno $n_1 p$, può essere espresso come [1]

$$\mathbf{E}_1^{d}(P;\mathbf{j}_1) = \frac{z}{jk}\left(k^2 + \nabla_{P'}\nabla_{P'}\cdot\right)\left[\frac{1}{2p\,j}\int_{-j\infty}^{j\infty} G_1^{s}(a_1, f_1')\frac{e^{-jk|P-P'(a_1)|}}{4p|P-P'(a_1)|}\,da_1 I_1\hat{z}_1\right] \tag{3}$$

in cui

$$G_i^{s,h}(f,f') = -\frac{1}{2n_i}\sum_{p,q=1}^{2} c_i^{p+q}\cot\left(\frac{p+(-1)^p f+(-1)^q f'}{2n_i}\right) \tag{4}$$

denota la funzione di Green del diedro per le condizioni al contorno soft (apice s, $c_1 = -1$) o hard (apice h, $c_1 = 1$). La (3) può essere interpretata come la sovrapposizione (integrale) di una distribuzione spettrale di dipoli elettrici $\mathbf{j}_1(a_1)$ in posizione $P'(a_1) = Q_1 - r_1'(\sin b_1'\cos a_1\hat{x}_1 + \sin b_1'\sin a_1\hat{y}_1 + \cos b_1'\hat{z}_1)$, orientati lungo $\hat{z}_1$ e di intensità $\frac{1}{2p\,j}G_1^{s}(a_1, f_1')I_1 da_1$, che irradiano nello spazio libero. Per introdurre l'effetto del diedro 2, di angolo esterno $n_2 p$, si considera il contributo di campo diffratto su tale diedro da ciascun dipolo spettrale. Al fine di isolare, ad esempio, solo il primo termine della diade, si calcola l'accoppiamento $\mathbf{E}_2^{d}(P;\mathbf{j}_1(a_1))\cdot\mathbf{j}_2$, dovuto al contributo di campo diffratto, tra la generica sorgente spettrale di (3) ed un dipolo elementare elettrico di intensità $\mathbf{j}_2 = I_2\hat{z}_2$ parallelo allo spigolo 2 (osservazione TM_{z_2}). Mediante il teorema di reciprocità, tale contributo può essere scritto come il prodotto scalare tra il dipolo elettrico spettrale $\mathbf{j}_1(a_1)$ ed il campo diffratto sul diedro 2 dalla sorgente $\mathbf{j}_2$, valutato in $P'(a_1)$

$$\mathbf{E}_2^d\left(P'(a_1);\mathbf{j}_2\right)=\tfrac{z}{jk}\left(k^2+\nabla_{P'}\nabla_{P'}\cdot\right)\left[\tfrac{1}{2pj}\int_{-j\infty}^{j\infty}G_2^s\left(a_2,f_2\right)\tfrac{e^{-jk|P(a_2)-P'(a_1)|}}{4p|P(a_2)-P'(a_1)|}da_2 I_2\hat{z}_2\right]. \tag{5}$$

Sovrapponendo i contributi relativi a tutte le sorgenti spettrali $\mathbf{j}_1(a_1)$, si ottiene una rappresentazione per il contributo di accoppiamento tra $\mathbf{j}_1$ e $\mathbf{j}_2$ dovuto al campo doppiamente diffratto

$$c_{j_1 j_2}=\tfrac{jkzI_1I_2}{(2p)^2}\int_{-j\infty}^{j\infty}\int_{-j\infty}^{j\infty}G_1^s\left(a_1,f_1'\right)G_2^s\left(a_2,f_2\right)\left[\hat{z}_1\cdot\hat{z}_2\left(1+\tfrac{1}{jkR}-\tfrac{1}{k^2R^2}\right)-\left(\hat{z}_1\cdot\hat{R}\right)\left(\hat{z}_2\cdot\hat{R}\right)\left(1+\tfrac{3}{jkR}-\tfrac{3}{k^2R^2}\right)\right]\tfrac{e^{-jkR}}{4pR}da_1da_2\ , \tag{6}$$

dove si è posto $P(a_2)-P'(a_1)=R(a_1,a_2)\hat{R}(a_1,a_2)$. Il coefficiente di accoppiamento (6) è espresso in forma di doppio integrale spettrale, ma può essere valutato asintoticamente (nel punto di fase stazionaria 2D $(a_1,a_2)=(f_{12},f_{12}')$ definito da $\nabla R=0$) in modo uniforme introducendo opportune funzioni di transizione [6]. Infine normalizzando il coefficiente di accoppiamento rispetto al campo illuminate in $\mathbf{E}^i(Q_1)$ e al pattern di ricezione del dipolo ricevente $\mathbf{j}_2$, è possibile isolare il primo termine del coefficiente diadico di doppia diffrazione $D_{b_1'b_2}^{dd}$. Usando come antenna ricevente un dipolo magnetico $\mathbf{m}_2=V_2\hat{z}_2$ (osservazione TE_{z_2}) è possibile invece dedurre il secondo termine $D_{b_1'f_2}^{dd}$. Analogamente l'accoppiamento tra un dipolo magnetico $\mathbf{m}_1=V_1\hat{z}_1$ (illuminazione TE_{z_1}) con un dipolo ricevente elettrico $\mathbf{j}_2$ o magnetico $\mathbf{m}_2$ permettono di valutare, rispettivamente, i termini $D_{f_1'b_2}^{dd}$ e $D_{f_1'f_2}^{dd}$. L'espressione finale è data dalla somma di un termine dominante ed uno di ordine superiore $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{dd}=\underline{\underline{\tilde{\mathbf{D}}}}^{dd}+\underline{\underline{\tilde{\tilde{\mathbf{D}}}}}^{dd}$, con la generica entrata delle due diadi data dalle seguenti espressioni che coinvolgono le costanti espresse in Tab. 1.

componente	c_1	c_2	g
$\hat{b}_1'\hat{b}_2$	-1	-1	$\cos y$
$\hat{b}_1'\hat{f}_2$	-1	1	$-\sin y$
$\hat{f}_1'\hat{b}_2$	1	-1	$\sin y$
$\hat{f}_1'\hat{f}_2$	1	1	$\cos y$

Tab. 1 valori assunti dalle costanti nelle varie entrate delle diadi definite in (7) e (8).

$$\tilde{D}^{dd}=\frac{g}{8jp\,kn_1n_2\sin b_1'\sin b_2}\sum_{p,q,r,s=0}^{1}c_1^{\,p+q}c_2^{\,r+s}\cot\left(\tfrac{\Phi_1^{pq}}{2n_1}\right)\ \cot\left(\tfrac{\Phi_2^{rs}}{2n_2}\right)\ \tilde{T}(a_{pq},b_{rs},w), \tag{7}$$

$$\tilde{\tilde{D}}^{dd}=\frac{g\cos y}{32pk^2\left(\ell+\frac{r_1'r_2}{r_1'+\ell+r_2}\sin^2 y\right)\left(n_1n_2\sin b_1'\sin b_2\right)^2}\sum_{p,q,r,s=0}^{1}c_1^{\,p+q}c_2^{\,r+s}(-1)^{q+r}\csc^2\left(\tfrac{\Phi_1^{pq}}{2n_1}\right)\ \csc^2\left(\tfrac{\Phi_2^{rs}}{2n_2}\right)\ \tilde{\tilde{T}}(a_{pq},b_{rs},w). \tag{8}$$

In (7) e (8) compaiono le funzioni di transizione $\tilde{T}(a,b,w)$ e $\tilde{\tilde{T}}(a,b,w)$ definite in [6] di argomenti $a_{pq}=\sin b_1'\sqrt{\frac{2kr_1'\left(\ell+\frac{r_1'r_2}{r_1'+\ell+r_2}\sin^2 y\right)}{r_1'+\ell}}\sin\left(\frac{\Phi_1^{pq}-2n_1pN^{pq}}{2}\right)$, $b_{rs}=\sin b_2\sqrt{\frac{2kr_2\left(\ell+\frac{r_1'r_2}{r_1'+\ell+r_2}\sin^2 y\right)}{r_2+\ell}}\sin\left(\frac{\Phi_2^{rs}-2n_2pN^{rs}}{2}\right)$ e $w=\cos y\ \frac{\sqrt{r_1'r_2}}{\sqrt{r_1'+\ell}\sqrt{r_2+\ell}}$. Inoltre $\Phi_1^{pq}=p+(-1)^p f_1'+(-1)^q f_{12}$ e $\Phi_2^{rs}=p+(-1)^r f_2+(-1)^s f_{12}'$, mentre N^{pq} e N^{rs} sono gli interi che più da vicino soddisfano le relazioni $2n_1pN^{pq}=\Phi_1^{pq}$ and $2n_2pN^{rs}=\Phi_2^{rs}$.

Casi limite

Fuori dalle transizioni. E' immediato verificare che al di fuori delle regioni di transizione, dove le funzioni di transizione assumono valore pressoché unitario, il risultato ottenuto coincide con una descrizione GTD (non uniforme) della diffrazione in cascata dai due diedri. Il primo termine $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{D}}}}^{dd}$ di ordine asintotico k^{-1} rappresenta il campo diffratto dal diedro 1 che si diffrange successivamente sul diedro 2. Il termine $\underline{\underline{\tilde{\tilde{\mathbf{D}}}}}^{dd}$ di ordine superiore k^{-2} deriva dal contributo di diffrazione di *slope* calcolabile come derivata del campo diffratto dal diedro 1, nella direzione normale allo spigolo del diedro 2, moltiplicata per il coefficiente di diffrazione *slope* dal diedro 2.

Transizioni sulle ISB/RSB. Quando il punto di osservazione oltrepassa un confine d'ombra di incidenza (ISB_2), il campo singolarmente diffratto dal diedro 1 risulta discontinuo perché oscurato dal diedro 2 (Fig. 2). Analogamente se il punto di osservazione oltrepassa un confine d'ombra di riflessione (RSB_2), il campo diffratto dal diedro 1 e successivamente riflesso su una faccia di 2 risulta discontinuo perché il punto di riflessione esce dalla superficie riflettente attraverso lo spigolo 2 (Fig. 3). Il contributo doppiamente diffratto però presenta una regione di transizione, sulle ISB_2/RSB_2: un opportuno parametro $b_{rs}\to 0$ e la funzione di transizione $\tilde{T}(a,b\to 0,w)\approx\sqrt{jpb^2}F\left(\frac{a^2}{1-w^2}\right)$. Il termine dominante della doppia diffrazione, all'interno della regione di transizione cresce all'ordine asintotico $k^{-1/2}$, e in corrispondenza della ISB_2/RSB_2 risulta anch'esso discontinuo in modo da compensare la discontinuità del campo singolarmente diffratto dal diedro 1 e fornendo un campo totale continuo. Anche il termine di ordine superiore della doppia diffrazione manifesta una transizione, cresce all'ordine k^{-1} e ripristina la continuità della derivata del campo

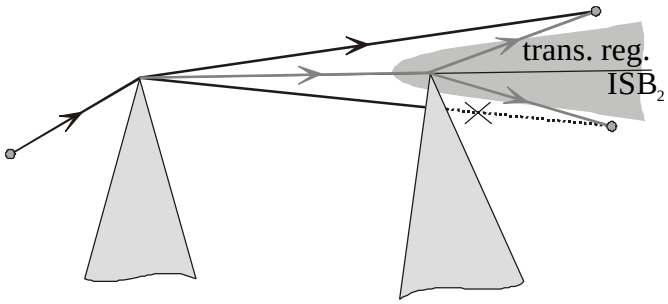

Fig. 2 Sparizione del contributo singolarmente diffratto dal diedro 1 attraverso la ISB_2, e relativa regione di transizione

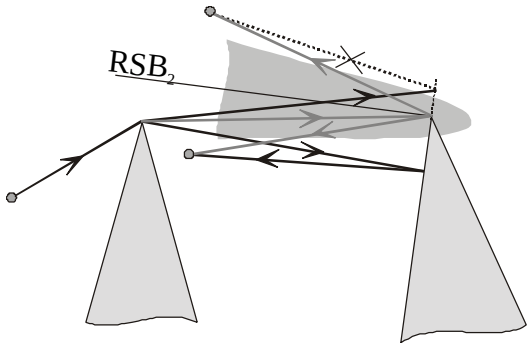

Fig. 3 Sparizione del contributo singolarmente diffratto dal diedro 1 e successivamente riflesso sulla faccia del diedro 2, attraverso la RSB_2, e relativa regione di transizione

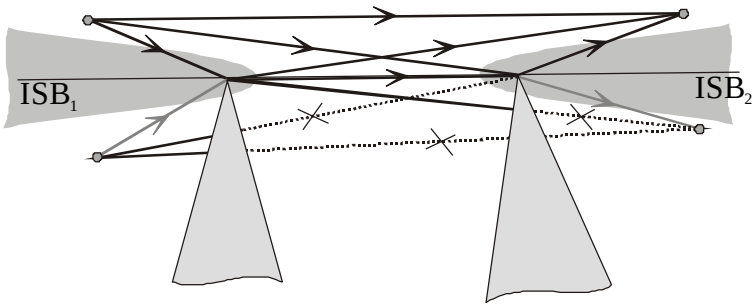

Fig. 4 Sparizione dei contributi diretto, singolarmente diffratto dal diedro 1 e singolarmente diffratto dal diedro 2 attraverso le ISB_1-ISB_2, e relative regioni di transizione

totale attraverso la ISB_2/RSB_2. In modo reciproco se muoviamo la sorgente illuminante, passando attraverso le ISB_1 il campo singolarmente diffratto dal diedro 2 risulta discontinuo perché il campo della sorgente non riesce più ad illuminare lo spigolo del diedro 2 a causa dell'oscuramento da parte del diedro 1. Oppure attraverso le RSB_1, il campo riflesso su una faccia del diedro 1 e poi diffratto dal 2 risulta discontinuo perché il campo riflesso dal diedro 1 non illumina più lo spigolo del diedro 2. Il contributo di doppia diffrazione, attraverso transizioni analoghe al caso precedente, gestite dal parametro $a_{pq} \to 0$, ripristina la continuità del campo totale e della sua derivata.

Doppia Transizione. Quando simultaneamente il punto di osservazione si trova in prossimità di una ISB_2/RSB_2 e la sorgente di una ISB_1/RSB_1, i campi singolarmente diffratti (o riflessi-diffratti, o diffratti riflessi) che vengono oscurati si trovano a loro volta in regime di transizione perché simultaneamente viene oscurato anche un contributo di GO (diretto, riflesso o doppio riflesso) (Fig. 4). In questo caso entrambi i parametri $a_{pq}, b_{rs} \to 0$ e le funzioni di transizione $\tilde{T}(a \to 0, b \to 0, w) \approx jp\sqrt{\frac{a^2b^2}{1-w^2}}$, $\tilde{\tilde{T}}(a \to 0, b \to 0, w) \approx -4\sin^{-1} w \frac{a^2b^2}{w\sqrt{1-w^2}}$. Entrambi i contributi di doppia diffrazione crescono all'ordine asintotico della GO k^0 e ripristinano la continuità del campo totale.

Spigoli coplanari. Se i diedri hanno spigoli coplanari $y \to 0, p$, la diade assume aspetto diagonale, e la presente formulazione riproduce esattamente [7] come caso particolare. Se poi i due spigoli coplanari presentano una faccia a comune, come in una piastra poligonale, la presente formulazione, grazie all'introduzione del termine di ordine superiore, permette di dare una descrizione anche per la polarizzazione $\hat{b}_1'\hat{b}_2$, il cui raggio doppiamente diffratto *striscia* sulla faccia a comune tra i due spigoli e viene cortocircuitato, subendo una più forte attenuazione. Per tale polarizzazione l'interazione tra i due spigoli è puramente di *slope* e viene descritta dal solo termine di secondo ordine (il termine dominante si annulla). Durante la presentazione del lavoro verranno mostrati alcuni esempi numerici utili a verificare il comportamento della descrizione del campo nelle varie regioni di transizione e dimostrarne l'efficacia e l'impatto applicativo all'interno di un codice previsionale che implementi la UTD per scenari arbitrari.

Bibliografia

[1] R. G. Kouyoumjian and P. H. Pathak, "A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface", *Proc. IEEE*, vol. 62, pp. 1448-1461, Nov. 1974.

[2] R. Tiberio, G. Manara, G. Pelosi and R. G. Kouyoumjian, "High-frequency electromagnetic scattering of plane waves from double wedges", *Radio Sci*., vol. 17, pp. 323-336, 1982.

[3] M. Schneider and R. Luebbers, "A general UTD diffraction coefficient for two wedges", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 39, no. 1, pp. 8-14, Jan. 1991.

[4] L. P. Ivrissimtzis and R. J. Marhefka, "Double diffraction at a coplanar skewed edge configuration", *Radio Sci.*, vol. 26, 1991.

[5] P. C. Clemmow and T. B. A. Senior, "A note on the generalized Fresnel integral" *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 49, 1953.

[6] F. Capolino, M. Albani, S. Maci and R. Tiberio, "Diffraction from a couple of coplanar, skew edges", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 45, n.8, pp. 1219-1226 Aug. 1997.

[7] M. Albani, F. Capolino, S. Maci and R. Tiberio "Double Diffraction at a Pair of Coplanar Skew Wedges " IEEE AP-S Symposium, 12-17 July 1999, Orlando, Florida.