

IL QUADRUPLICATORE OTTIMO A FASE PARI

F. Frezza¹, L. Pajewski¹ e G. Schettini²

¹Dip. di Ingegneria Elettronica, Università “La Sapienza” di Roma
Via Eudossiana 18, 00184 Roma

²Dip. di Elettronica applicata, Università degli Studi “Roma Tre”
Via della Vasca Navale, 84, 00146 Roma – E-mail: g.schettini@uniroma3.it

Abstract

The even-phase diffractive optical element that produces four equi-intense diffraction orders with the maximum efficiency is analytically derived. A full-wave electromagnetic analysis is performed to study the behavior of the device in the resonance domain and in the scalar limit. Design curves for the transmission efficiency as a function of the grating period and of the incidence angle are presented. The effects of a quantization of the phase profile to a discrete number of phase levels are considered. The optimization of a simple structure with only four phase levels is reported, showing good results.

1. INTRODUZIONE

I divisori di fascio, dispositivi che dividono un fascio incidente in un certo numero di fasci di uguale intensità, sono tra gli elementi ottici diffrattivi più diffusi: trovano infatti impiego in molte applicazioni, come ad esempio nelle interconnessioni ottiche, nei processi di laser manufacturing, nell'elaborazione di segnali ottici [1].

La massimizzazione dell'efficienza di diffrazione, cioè della percentuale di energia incidente che viene convertita nel desiderato pattern di uscita, è uno dei principali obiettivi nel progetto di un elemento ottico diffrattivo, per raggiungere il quale si sviluppano ed utilizzano, nella maggior parte dei casi, delle tecniche numeriche.

In questo articolo è presentata la derivazione analitica scalare del profilo di un elemento ottico diffrattivo a fase pari che produca quattro ordini di uguale intensità con la massima efficienza possibile (Sezione 2).

Come è noto, nel dominio parassiale la natura vettoriale della luce può essere trascurata e l'influenza di un elemento ottico diffrattivo sul fronte d'onda incidente può essere descritta dalla sua funzione di trasmissione [2]. Tuttavia, nel dominio di risonanza (quando il profilo del reticolo contiene dettagli le cui dimensioni trasverse sono confrontabili con la lunghezza d'onda della radiazione incidente), la teoria scalare fallisce ed è necessaria una rigorosa applicazione della teoria elettromagnetica per studiare correttamente le proprietà dell'elemento. Nella Sezione 3 è presentata l'analisi rigorosa del quadruplicatore ottimo che permette, tra l'altro, di capire quali sono i limiti operativi del componente, di studiare la sua risposta angolare, e di trovare soluzioni non previste dalla teoria scalare.

Il profilo di un elemento ottico diffrattivo può essere multilivello o continuo. Nel primo caso la struttura tipicamente presenta $M=2^N$ valori discreti di profondità, dove N è il numero di passi di fabbricazione. Ovviamente è possibile approssimare il profilo continuo di un reticolo discretizzandolo in un opportuno numero di sottili reticoli binari: se ogni strato è sufficientemente sottile, la struttura originaria può essere analizzata con elevata accuratezza facendo uso delle tecniche matematiche sviluppate per analizzare i reticoli multilivello [3]. Nella Sezione 3 vengono anche studiati gli effetti della quantizzazione del profilo continuo del quadruplicatore in un numero discreto di livelli.

Infine, nella Sezione 4, è affrontata l'ottimizzazione del quadruplicatore a quattro livelli, elemento semplice da realizzare, che presenta interessanti caratteristiche di funzionamento.

2. PROFILO DI FASE DEL QUADRUPLICATORE OTTIMO

In questa Sezione è presentata la derivazione analitica scalare del profilo di fase del quadruplicatore ottimo, elemento ottico diffrattivo che produca in uscita quattro repliche

equi-intense del campo incidente con la massima efficienza possibile (si veda l'inserto in Fig. 1: si noti che l'incidenza è normale).

Si consideri un reticolo avente funzione di trasmissione $\tau(x)=e^{i\Phi(x)}$, dove $\Phi(x)$ denota il profilo di fase. Senza perdita di generalità, nelle formule di questa Sezione si assumerà un valore unitario (nelle opportune unità di misura) del periodo d . Poiché $\tau(x)$ è una funzione periodica, è possibile espanderla in serie di Fourier come segue:

$$\tau(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_n e^{i2\pi nx}, \quad \text{con} \quad \tau_n = \int_{-1/2}^{1/2} \tau(x) e^{-i2\pi nx} dx. \quad (1)$$

Assumendo che il profilo di fase del reticolo sia pari, ossia che $\Phi(x) = \Phi(-x)$, si ha $\tau_{-n} = \tau_n$. In particolare, l'espressione di $\tau_{\pm n}$ risulta essere:

$$\tau_{\pm n} = 2 \int_0^{1/2} e^{i\Phi(x)} \cos(2\pi nx) dx, \quad (2)$$

dove $n=1,3$. Si consideri ora il funzionale $\mathfrak{S} = |\tau_1|^2 + \beta |\tau_3|^2$ e si imponga che la sua variazione prima $\delta \mathfrak{S}$ sia nulla. Dopo alcuni passaggi, si trova la seguente espressione per la funzione $\Phi(x)$ che massimizza \mathfrak{S} :

$$\Phi(x) = \text{atan} \left[\frac{\beta S_3 \cos(6\pi x)}{\cos(2\pi x) + \beta C_3 \cos(6\pi x)} \right] + \pi \text{step} \left\{ - \left[\cos(2\pi x) + \beta C_3 \cos(6\pi x) \right] \right\} \quad (3)$$

dove $\text{step}(\cdot)$ denota la funzione di Heaviside, $C_3 = \cos \alpha_3$, $S_3 = \sin \alpha_3$, e si è posto $|\tau_1| = |\tau_3|$, $\alpha_1 = 0$. Sostituendo l'Eq. (3) nella Eq. (2) e imponendo che $|\tau_1| = |\tau_3|$, si trovano i valori ottimi $\beta \cong 1.05$ e $\alpha_3 \cong 1.84$, per cui l'efficienza scalare è $\eta_{sc} = 4|\tau_1|^2 \cong 91.9\%$. Il profilo ottimo $\Phi(x)$ è mostrato in Fig. 1.

3. ANALISI FULL-WAVE

In questa Sezione si analizza il comportamento del quadruplicatore ottimo facendo uso di una teoria rigorosa diffrattiva per reticoli multistrato. La formulazione del metodo impiegato è riassunta in [3]. Si ottiene un sistema di equazioni che deve essere risolto per determinare le ampiezze dei campi riflesso e trasmesso, in modo che sia possibile calcolare le efficienze di diffrazione. Per ottenere una rapida convergenza anche in caso di polarizzazione TM e per migliorare la stabilità numerica e l'efficienza dei codici implementati, sono state applicate le tecniche proposte in [4] e [5].

Nelle simulazioni si suppone che il quadruplicatore ottimo sia realizzato in vetro ($n_d = 1.5$) immerso nel vuoto ($n_a = 1$); lo spessore del reticolo multistrato è $a_0 = 1.63\lambda$, corrispondente a una variazione di fase di 5.11 rad. Per approssimare il profilo continuo si impiega una pila di 64 strati di reticolo binario, tutti aventi spessore pari a $\lambda/40$.

La Fig. 2 mostra le efficienze di trasmissione η_T degli ordini ± 1 ($\eta_1 = \eta_{-1}$), ± 3 ($\eta_3 = \eta_{-3}$), in funzione di M ; il periodo del reticolo è $d = 20\lambda$ (poiché $d \gg \lambda$ non ci sono significative differenze fra la polarizzazione TE e la TM). Nella stessa figura è presentata l'efficienza complessiva del dispositivo $\eta = 2\eta_{\pm 1} + 2\eta_{\pm 3}$. Si noti che per $M = 64$ i valori corrispondenti agli ordini desiderati sono indistinguibili: questo mostra come il profilo continuo sia descritto in maniera accurata dalla presente discretizzazione.

Per motivi di spazio nelle figure successive ci si riferisce ai soli risultati della polarizzazione TE. La figura 3a mostra le efficienze in funzione di d/λ . Si vede che, nel limite $d \gg \lambda$, $\eta_{\pm 1}$ e $\eta_{\pm 3}$ tendono allo stesso valore, come deve essere. Inoltre, in tale limite l'efficienza totale del dispositivo ($\eta \cong 84\%$) corrisponde esattamente all'efficienza scalare (calcolata nella Sezione 2) corretta tramite il coefficiente di trasmissione di Fresnel. E' importante notare, inoltre, che l'uso dell'impostazione vettoriale del problema consente di trovare soluzioni non previste dall'analisi scalare nel dominio di risonanza dell'ottica diffrattiva. Tali soluzioni si trovano per valori di d/λ per i quali coincidono $\eta_{\pm 1}$ e $\eta_{\pm 3}$.

La Figura 3b mostra η_0 e $\eta_{\pm 2}$, in funzione di d/λ . Si noti come le efficienze di questi ordini non desiderati tendano a zero nel limite $d \gg \lambda$: così deve risultare, poiché nel limite scalare il quadruplicatore invia potenza sui soli ordini voluti. Dalla Fig. 3 si può infine vedere che per $d/\lambda < n_a/n_d \cong 0.667$ si propaga il solo ordine zero.

La risposta angolare del quadruplicatore ottimo è riportata in Fig. 4: in (a) si mostrano $\eta_{\pm 1}$, $\eta_{\pm 3}$ e η in funzione dell'angolo di incidenza θ , per $d/\lambda=20$; in (b) sono mostrate, invece, le basse efficienze di trasmissione η_0 e $\eta_{\pm 2}$.

Come detto in precedenza si è scelto di approssimare il profilo continuo del dispositivo con una pila di reticoli binari sottili. E' evidente dalla Fig. 2 che anche soltanto $M=16$ strati sono sufficienti ad assicurare una buona accuratezza. Ridurre il numero degli strati è utile non solo dal punto di vista computazionale, ma anche da un punto di vista pratico: una volta fissati dei requisiti di uniformità sui fasci d'uscita del quadruplicatore, è possibile individuare il minimo numero di passi di fabbricazione necessari per realizzare il componente. Quando il numero di strati è troppo piccolo la discretizzazione non dà risultati soddisfacenti, come è possibile evincere dalla Fig. 2.

3. QUADRUPLICATORE A QUATTRO LIVELLI

In questa Sezione si ottimizza un reticolo a quattro livelli, al fine di ottenere il quadruplicatore a quattro livelli più efficiente. Si mostra come sia possibile, scegliendo in maniera opportuna i parametri strutturali, ottenere un dispositivo molto semplice con efficienza, ovviamente minore, ma comparabile con quella del quadruplicatore ottimo.

Per il reticolo a quattro livelli il cui profilo di fase è mostrato in Fig. 5, si ha:

$$\tau_n = [2(C_1 - C_2) \sin(2n\pi r) + (e^{-i\Phi_2} - e^{i\Phi_1})] / (n\pi), \quad (5)$$

dove $C_j = \cos\Phi_j$ ($j=1,2$). Imponendo $|\tau_1| = |\tau_3|$, con $S_j = \sin\Phi_j$ e $R = \sin(2\pi r)$, si ottiene:

$$8R^6 - 12R^4 - 2R^3 + 6R - 1 = [(S_1 + S_2) / (C_1 - C_2)]^2. \quad (6)$$

Dall'Eq. (6), chiamando F il secondo membro, si trovano le seguenti soluzioni per S_2 :

$$S_2 = -S_1, \quad S_2 = [(-1 + F^2)S_1 \pm 2\sqrt{-F(1+F)^2(-1+S_1^2)}] / (1+F)^2. \quad (7)$$

La prima soluzione delle (7) va scartata perché annulla τ_1 e τ_3 . Inoltre, perché la seconda soluzione delle (7) sia reale, si deve avere $F > 0$; ne deriva la seguente limitazione sui valori che r può assumere: $r \in [0.0272, 0.146]$. In definitiva, la seconda soluzione delle (7) fornisce, per ogni coppia (r, Φ_1) , il corrispondente valore di Φ_2 che rende $|\tau_1| = |\tau_3|$. Massimizzando numericamente τ_1 , si trova che, quando $r \cong 0.0833$, $\Phi_1 \cong 0.815$ rad e $\Phi_2 \cong 2.33$ rad, l'efficienza del componente risulta essere $\eta_{SC} \cong 85.83\%$. Questo valore è molto più alto di $\eta_{SC} \cong 72.05\%$, che è la massima efficienza ottenibile con un reticolo di Damman [6].

La teoria full-wave per reticoli multistrato è stata applicata anche all'analisi di questo semplice componente. La Figura 6 mostra l'andamento delle efficienze di trasmissione $\eta_{\pm 1}$, $\eta_{\pm 3}$ e η , in funzione di d/λ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] H.P. Herzig, ed., *Micro-Optics: Elements, Systems, and Applications*, Taylor&Francis, Londra, 1997.
- [2] M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics*, settima edizione, Cambridge University Press, Cambridge 1999.
- [3] R. Borghi, F. Frezza, L. Pajewski, M. Santarsiero e G. Schettini, "Full-wave analysis of the optimum triplicator", *J. of Electromagnetic Waves and Appl.*, vol. 15, pp. 689-707, maggio 2001.
- [4] P. Lalanne e G.M. Morris, "Highly improved convergence of the coupled-wave method for TM polarization", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 13, pp. 779-784, aprile 1996.

- [5] M.G. Moharam, D.A. Pommet, E.B. Grann e T.K. Gaylord, "Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 12, pp. 1077-1086, maggio 1995.
- [6] C. Zhou e L. Liu, "Numerical study of Dammann array illuminators", *Appl. Opt.*, vol. 34, pp. 5961-5969, settembre 1995.

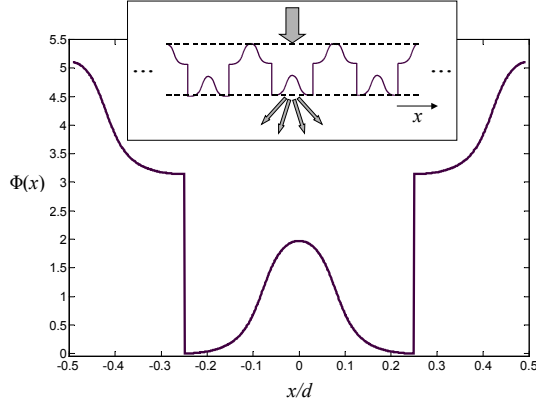


Fig. 1 - Profilo del quadruplicatore ottimo

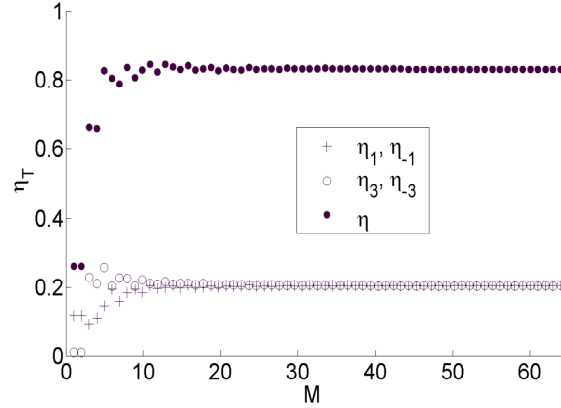


Fig. 2 - Convergenza di η_T in funzione di M ; $d/\lambda=20$.

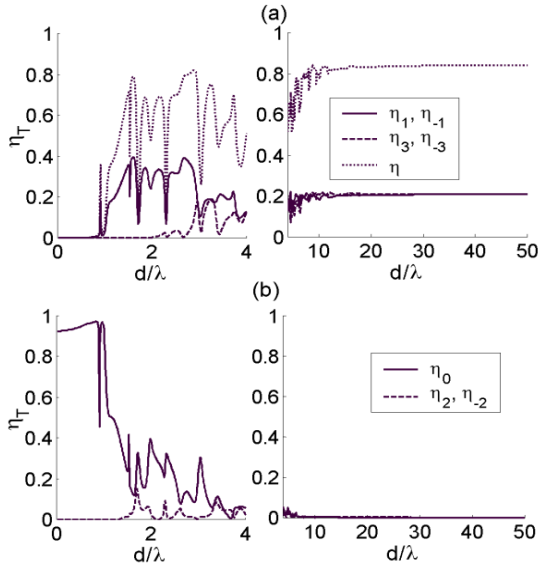


Fig. 3 - Efficienza di trasmissione η_T vs. d/λ ; (a) ordini desiderati, (b) ordini indesiderati.

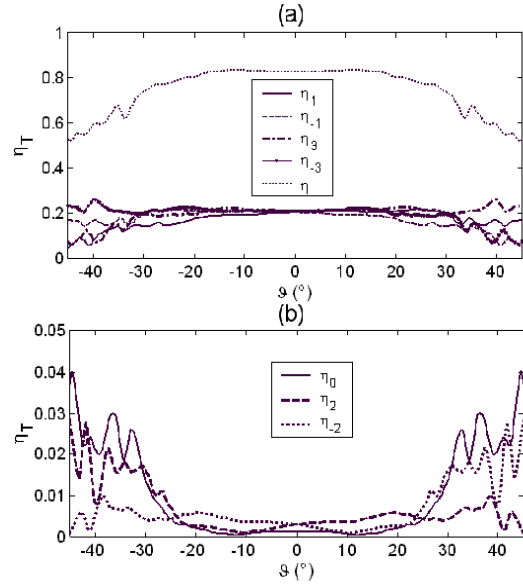


Fig. 4 - Banda angolare; (a) ordini desiderati, (b) ordini indesiderati.

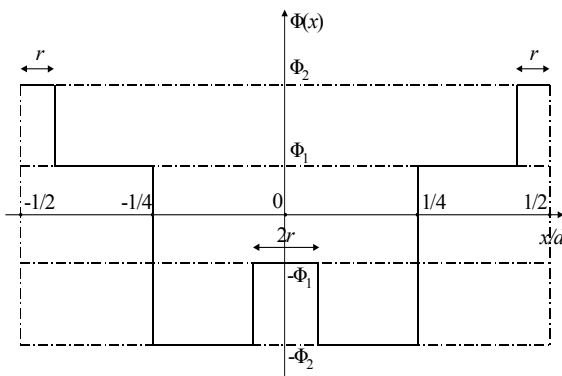


Fig. 5 - Profilo di fase del reticolo a 4 livelli.

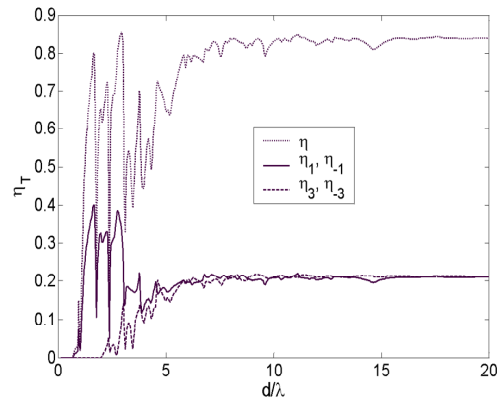


Fig. 6 - Efficienza di trasmissione η_T vs. d/λ .