# UN APPROCCIO PER LA TOMOGRAFIA A MICROONDE DI STRUTTURE STRATIFICATE

**Lorenzo Crocco, Francesco Soldovieri**

Istituto per il Rilevamento Elettromagnetico dell'Ambiente, IREA-CNR
Via Diocleziano 328, I-80124 Napoli, Italy; {crocco.l, soldovieri.f}@irea.cnr.it

**ABSTRACT -** *In this communication we apply a linearized tomographic approach to the reconstruction of dielectric objects embedded in a layered medium. The proposed inversion approach achieves a regularized formulation by means of the Singular Value Decomposition (SVD) and takes into account the frequency-dependent nature of the unknown profile. Numerical examples are provided to show the feasibility of the approach when considering aspect-limited noisy data.*

## 1. INTRODUZIONE

Il Ground Penetrating Radar (GPR) è largamente impiegato in diverse applicazioni di diagnostica non invasiva poiché consente di effettuare sondaggi in maniera semplice e rapida. Solitamente, l'elaborazione dei dati GPR è basata su approcci mutuati dalle tecniche radar, i quali, a causa della notevole complessità dello scenario investigato, forniscono risultati che sono tuttavia soggetti all'interpretazione dell'utilizzatore. Diversamente, il cosiddetto approccio tomografico consente di ottenere informazioni *quantitative* circa la posizione, la forma ed eventualmente la natura degli oggetti diffusori presenti nella regione investigata. Tuttavia, al tal fine occorre affrontare la soluzione di un problema inverso di diffusione elettromagnetica che, come è ben noto, è mal posto e non lineare. Ulteriori difficoltà sorgono poi a causa del comportamento dispersivo in frequenza del mezzo investigato e dalla necessità di adottare configurazioni di misura con domini di osservazione a volte molto limitati

Le tecniche tomografiche basate sull'approssimazione di Born sono largamente diffuse in letteratura [1,2,3]. Sebbene i limiti di validità di tale approssimazione restringano l'applicabilità di tali metodi, diverse considerazioni spingono ad investigarne le caratteristiche. In primo luogo, le tecniche di inversione non lineari, basate sulla minimizzazione di un funzionale di costo, sono computazionalmente onerose e la loro affidabilità dipende dalla scelta del punto iniziale. Inoltre, qualora il diffusore sia immerso in un mezzo con perdite, è possibile mostrare che il "grado di non linearità" del problema diminuisce al crescere delle perdite [4]. Infine, nell'ambito di un modello linearizzato è possibile caratterizzare sia la classe delle funzioni ricostruibili che la configurazione di misura, come mostrato in [3] per il caso di semispazio.

Sulla base di queste considerazioni, limitandoci per semplicità al caso 2D, si presenta in questa comunicazione un approccio tomografico linearizzato in grado di tenere in conto la natura dispersiva dei mezzi. In particolare, l'approccio sarà utilizzato per l'analisi di strutture stratificate [5], situazione rappresentativa di applicazioni di diagnostica di strutture murarie ovvero di prospezioni dei primi strati del sottosuolo.

## 2. L'APPROCCIO TOMOGRAFICO LINEARIZZATO

La geometria di riferimento è mostrata in Fig.1; in ciascuno strato (assunto isotropo e non magnetico) la permittività equivalente dipende dalla frequenza secondo la legge:

$$\varepsilon_i^{eq}(\omega) = \varepsilon_i - j\,\sigma_i / \omega\varepsilon_o, \tag{1}$$

dove $\varepsilon_o$ è la permittività dielettrica del vuoto ed $\omega$ la pulsazione. La regione quadrata $D$ contiene le inclusioni e le funzioni $\varepsilon_D$ e $\sigma_D$ ivi definite sono incognite. La sorgente primaria è costituita da un filo di corrente infinitamente esteso e parallelo all'asse $z$ che si muove lungo una linea $\Gamma$ parallela all'interfaccia. Nella banda di frequenze $\Omega$ e per ciascuna posizione della sorgente, il campo retrodiffuso è misurato in diversi punti lungo la stessa linea $\Gamma$, così da realizzare una configurazione di misura multivista-multistatica-multifrequenza.

Sulla base delle considerazioni esposte, in questa comunicazione considereremo un modello linearizzato descritto dalla seguente equazione integrale:

$$E_s\left(\mathbf{r_r}, \mathbf{r_t}, \omega\right) = k_2^2 \int_D \frac{E_{inc}\left(\mathbf{r}', \mathbf{r_t}, \omega\right) g\left(\mathbf{r_r}, \mathbf{r}'\omega\right)}{\varepsilon_2 - j\,\sigma_2 / \omega\varepsilon_o} \times \left( \Delta\varepsilon(\mathbf{r}') - \frac{j\omega_m}{\omega} \Delta\sigma(\mathbf{r}') \right) d\mathbf{r}'. \tag{2}$$

dove $k_2$ è il numero d'onda (complesso) nel secondo strato, $E_{inc}$ ed $E_s$ sono rispettivamente il campo incidente in $D$ ed il campo diffuso su $\Gamma$ e $\mathbf{r_t}$, $\mathbf{r_r}$ denotano rispettivamente le posizioni della sorgente ed i punti di misura. Infine $g$ è la funzione di Sommerfeld-Green relativa alla geometria in esame, come riportata in [5].

Nello scrivere la (2) si è sfruttata la conoscenza del modello assunto per la dispersività (1). In essa infatti compaiono le funzioni indipendenti dalla frequenza

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_D - \varepsilon_2, \quad \Delta\sigma = \frac{\sigma_D - \sigma_2}{\omega_m \varepsilon_0}, \tag{3}$$

con $\omega_m$ pari alla frequenza di centro banda. Assumendo questa coppia di funzioni come l'incognita del nostro problema è dunque possibile, senza trascurare il carattere dispersivo dei mezzi, tenere esplicitamente in conto la legge di dispersività in frequenza del mezzo investigato. Ciò è estremamente importante al fine di sfruttare adeguatamente i dati raccolti a più frequenze riuscendo ad ampliare l'insieme dei dati indipendenti, senza per questo aumentare il numero di incognite.

Sinteticamente, il problema consiste nell'inversione dell'operatore lineare

$$\mathcal{L}_{\mathrm{DB}} : x \in X \subset L^2(D) \times L^2(D) \to E_s \in Y \subset L^2(\Gamma \times \Gamma \times \Omega), \tag{4}$$

dove $X$ è il sottospazio contenente tutte le coppie $x = (\Delta\varepsilon, \Delta\sigma)$, e $Y$ è il sottospazio contenente i campi diffusi per tutte le possibili posizioni di misura su $\Gamma$, tutte le possibili posizioni della sorgente su $\Gamma$, nella banda di frequenze $\Omega$.

Come ben noto, tale inversione è un problema mal posto e la sua corretta risoluzione richiede il ricorso ad un'opportuna strategia di regolarizzazione. Per le proprietà del suo nucleo $\mathcal{L}_{\mathrm{DB}}$ è un operatore compatto e pertanto le sue proprietà possono essere convenientemente analizzate mediante la sua SVD. In particolare, è possibile esprimere formalmente la soluzione del problema come:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} < E_s, v_n >_Y u_n, \tag{5}$$

in cui $u_n$ e $v_n$ sono rispettivamente delle basi per lo spazio delle funzioni "visibili" e lo spazio dei dati esenti da rumore ed i $\sigma_n$ sono i valori singolari ordinati in una sequenza non crescente e tendente a zero. Grazie a tale proprietà, l'espressione (5) consente di giungere ad una soluzione regolarizzata del problema troncando opportunamente la sommatoria all'indice $N$ a partire dal quale i termini sono sovrastati dal rumore

inevitabilmente presente sulle misure. Poiché il risultato così ottenuto è un'approssimazione della funzione cercata, la scelta della soglia si profila come un compromesso tra l'accuratezza della soluzione e la sua stabilità. Tuttavia, in generale, non è possibile individuare una scelta ottimale per $N$, dal momento che esso dipende non solo dal livello di rumore atteso ma anche dall'errore di approssimazione legato all'utilizzo di un modello lineare. Poiché quest'ultimo a sua volta dipende dal diffusore incognito, si intuisce come non sia possibile stabilire a priori un criterio per la scelta di $N$. Negli esempi considerati si è scelto scartare nella (5) i termini corrispondenti ai valori singolari inferiori al rapporto segnale rumore atteso.

## 3. DISCRETIZZAZIONE DEL PROBLEMA ED ESEMPI NUMERICI

L'implementazione numerica della procedura descritta è basata su una formulazione matriciale in cui sono coinvolte solo matrici reali.

Considerando una base di impulsi rettangolari, il dominio di indagine è stato diviso in $N_c$x$N_c$ celle ed il corrispondente vettore delle incognite ha dimensione 2x$N_c^2$, le cui prime $N_c^2$ righe contengono i campioni di $\Delta\varepsilon$, e le seconde $N_c^2$ righe quelli di $\Delta\sigma$.

La configurazione di misura prevede $N_m$ punti di misura, $N_v$ (= $N_m$) campi incidenti ad $N_f$ frequenze, così da costituire un insieme di $N$= $N_m$x$N_v$x$N_f$ dati (complessi). Il vettore dei dati è quindi organizzato come un vettore colonna di dimensione $2N$, le cui prime $N$ righe contengono le parti reali dei campi diffusi (a ciascuna frequenza, per ciascuna vista e per ciascun punto di misura) e le seconde $N$ le parti immaginarie.

Con questa procedura, la (2) è ricondotta all'equazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon \\ \Delta\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(E_S) \\ \mathrm{Im}(E_S) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

dove **A**, **B**, **C**, **D** sono matrici di dimensione $N$x$N_c^2$, valutate separando le parti reali ed immaginarie della (2) nella sua versione discretizzata. La SVD può quindi essere direttamente applicata alla matrice composta che compare nella (6).

Per mostrare la validità dell'approccio proposto mostriamo alcuni esempi numerici rappresentativi della diagnostica di una struttura muraria di spessore $d$ = 1.5 m, caratterizzata da $\varepsilon_2$ = 5 e $\sigma_2$ = 1e-2 S/m, con il primo e terzo mezzo aventi le caratteristiche del vuoto. La regione investigata ha lato 0.80 m, è posta ad una distanza di 1 cm dalla prima interfaccia ed è discretizzata in 40x40 celle. Le frequenze impiegate sono 500, 600, 700 MHz. A ciascuna frequenza si sono considerate 13 posizioni della sorgente ed il corrispondente campo diffuso è stato misurato in 13 posizioni uniformemente spaziate su una linea lunga 0.8 m. I dati, generati numericamente con un simulatore "esatto", sono stati corrotti con un rumore Gaussiano bianco additivo con SNR = 20 dB. Le ricostruzioni "regolarizzate" sono state quindi ottenute assumendo una soglia di –20 dB per il "taglio" dei valori singolari nella (5).

Un primo esempio fa riferimento ad un oggetto rettangolare ($\varepsilon$ = 4.9, $\sigma$ = 9 mS/m), centrato rispetto al dominio di osservazione e posto ad una profondità di 20 cm. Come mostrato in Fig.2 la ricostruzione ottenuta permette di localizzare correttamente l'oggetto; in particolare è possibile localizzarne tanto l'interfaccia superiore che quella inferiore.

Nel secondo esempio lo stesso oggetto è posto a 50 cm di profondità, come è possibile osservare dalla Fig.3 è ancora possibile localizzare il diffusore, ma l'attesa perdita di risoluzione in profondità rende difficile stimarne la collocazione in verticale.

L'ultimo esempio si riferisce alla presenza simultanea di due oggetti aventi le stesse caratteristiche di quelli precedenti e posti uno in prossimità della superficie (20 cm) e l'altro in profondità (50 cm). Come è lecito attendersi il diffusore "superficiale" viene correttamente localizzato, ma la sua presenza rende più difficile la localizzazione di quello in profondità (Fig. 4).

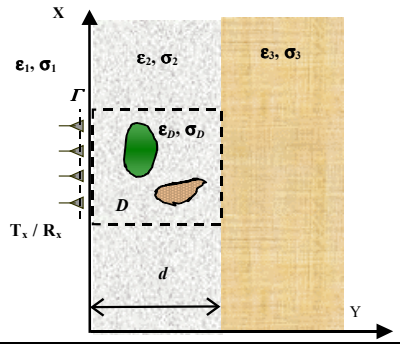


Fig. 1 Geometria del Problema

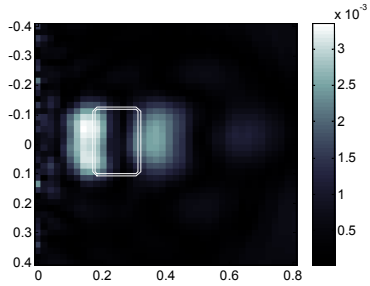


Fig. 2 Ricostruzione di un oggetto

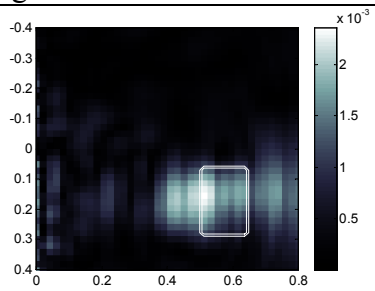


Fig. 3 Ricostruzione di un oggetto

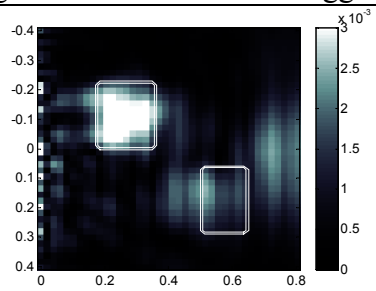


Fig. 4 Ricostruzione di due oggetti

## RIFERIMENTI


[1] T.J. Cui, W.C. Chew, "Diffraction tomography algorithm for the detection of three-dimensional objects buried in a lossy half space", *IEEE Trans. On Geosci. Remote Sens.*, vol. 40, pp. 42 – 49, 2002.

[2] P. Meincke, "Linear GPR inversion for lossy soil and a planar air-soil interface", *IEEE Trans. On Geosci. Remote Sens.*, vol. 39, pp. 2713 – 2721, 2001.

[3] G. Leone, F. Soldovieri, "Analysis of the distorted Born approximation for subsurface reconstruction: truncation and uncertainties effect", in stampa su *IEEE Trans. On Geosci. Remote Sens.,* 2002.

[4] O. M. Bucci, N. Cardace, L. Crocco, T. Isernia, "Degree of Non-Linearity And A New Solution Procedure In Scalar 2-D Inverse Scattering Problems", *J. Opt. Soc. Am. A*, **18**, pp. 1832-1845, 2001.

[5] L. Crocco, R. Persico, F. Soldovieri, "A microwave tomography approach for imaging targets embedded in a layered medium", *Proc. Ninth International Conference on Ground Penetrating Radar*, GPR 2002, Santa Barbara, CA.