

PROPRIETA' DI RIFLESSIONE E TRASMISSIONE DI UN FRATTALE DI CANTOR

F.Chiadini*, V.Fiumara* , I.M.Pinto**, A.Scaglione*

* D.I.I.I.E., Università di Salerno
via Ponte don Melillo , 84084 Fisciano (SA)
(fiumara@diie.unisa.it)

** Università del Sannio, Benevento

Abstract

In this paper we analyze reflection characteristics of a multilayer structure constructed in accordance with the triadic fractal Cantor law. In our construction self-similarity concerns the optical lengths of the layers. The fractal structure of the multilayer gives rise to peculiar self-similar properties of the reflection coefficient.

INTRODUZIONE

Negli ultimi anni sono apparsi in letteratura diversi lavori riguardanti l'interazione tra onde elettromagnetiche e strutture multistrato realizzate secondo lo schema di un frattale di Cantor [1]-[3].

Scopo di tali lavori, in genere, è indagare su come la natura *self-similar* della struttura si rifletta nella risposta del sistema, ed evidenziare le potenzialità di queste strutture per la realizzazione di dispositivi ottici o a microonde che possano presentare caratteristiche vantaggiose legate alla loro natura frattale. La bibliografia completa sull'argomento è riportata in [1].

Nella quasi totalità dei lavori pubblicati vengono studiate strutture realizzate usando la costruzione frattale di Cantor in relazione alla lunghezza geometrica degli strati dielettrici. In questo lavoro, invece, studiamo strutture multistrato costruite usando la regola di Cantor relativamente al cammino ottico. Per questo tipo di dispositivi la risposta elettromagnetica (i risultati presentati riguardano il coefficiente di riflessione nel caso di un'onda piana con incidenza normale) presenta caratteristiche *self-similar* non osservate in precedenza in letteratura.

FRATTALE DI CANTOR

In questo lavoro consideriamo una struttura monodimensionale a più strati disposti secondo un frattale di Cantor triadico. Tale struttura può essere realizzata nel modo seguente. Si parte, allo stadio 0, con uno strato dielettrico di lunghezza ottica Δ . Allo stadio 1, la porzione centrale del dielettrico, di lunghezza ottica $\Delta/3$, è sostituita da uno strato dielettrico con caratteristiche diverse la cui lunghezza geometrica sia tale da mantenere la lunghezza ottica pari a $\Delta/3$; allo stadio 2 viene sostituita la porzione centrale (di lunghezza ottica $\Delta/9$) di entrambi gli strati laterali e così via (vedi figura 1).

Al generico stadio m la struttura sarà costituita da $N = 2^{m+1} - 1$ strati. In particolare, si avranno 2^m strati, corrispondenti ad un valore dispari dell'indice $i=1, \dots, N$ che descrive il multistrato, la cui lunghezza ottica sarà $\Delta/3^m$. Gli strati corrispondenti ad un valore

pari dell'indice i avranno lunghezza ottica variabile. In particolare i 2^{m-k} ($k = 1, \dots, m$) strati per i quali $i/2^k$ è dispari avranno lunghezza ottica $d_k = \Delta / 3^{m+1-k}$.

COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE E RIFLESSIONE

Consideriamo una struttura multistrato realizzata secondo la costruzione descritta nel paragrafo precedente, usando due mezzi dielettrici con permeabilità magnetica pari a quella del vuoto e indice di rifrazione rispettivamente n_1 ed n_2 . Il frattale sia ad un generico stadio di crescita m , ed il mezzo al suo esterno abbia le proprietà elettromagnetiche del vuoto ϵ_0, μ_0 . Un'onda piana monocromatica incida normalmente su tale struttura. Il problema della riflessione e trasmissione può essere affrontato mediante il metodo delle matrici di trasmissione [4]. La matrice di trasmissione del generico strato i -esimo che compone il sistema è data da:

$$\underline{\underline{M}}_i = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{b}_0 d_i) & \frac{j}{p_i} \sin(\mathbf{b}_0 d_i) \\ jp_i \sin(\mathbf{b}_0 d_i) & \cos(\mathbf{b}_0 d_i) \end{bmatrix} \quad (1)$$

dove d_i è il cammino ottico, \mathbf{b}_0 è la costante di propagazione nel vuoto e $p_i = \sqrt{\epsilon_i / \mu_0}$ è l'ammettenza caratteristica del mezzo.

La matrice di trasmissione complessiva è data dal prodotto delle singole matrici di trasmissione. Individuando con il pedice 1 lo strato sul quale incide l'onda piana, si ha:

$$\underline{\underline{M}}_{tot} = \underline{\underline{M}}_1 \underline{\underline{M}}_2 \cdots \underline{\underline{M}}_N$$

I coefficienti di riflessione Γ e di trasmissione t possono essere espressi mediante gli elementi della matrice di trasmissione complessiva usando le formule:

$$\Gamma = \frac{(M_{tot11} + M_{tot12} p_f) p_{in} - (M_{tot21} + M_{tot22} p_{out})}{(M_{tot11} + M_{tot12} p_{out}) p_{in} + (M_{tot21} + M_{tot22} p_{out})} \quad (2)$$

$$t = \frac{2 p_{in}}{(M_{tot11} + M_{tot12} p_{out}) p_{in} + (M_{tot21} + M_{tot22} p_{out})} \quad (3)$$

dove, nel nostro caso, $p_{in} = p_{out} = \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0}$.

Le figure 2-4 mostrano il modulo del coefficiente di riflessione Γ , calcolato con il metodo delle matrici di trasmissione, nel caso $n_1 = 1.5$ e $n_2 = 1$, e $\Delta = 0.45$ cm, per $m = 1, 2, 3$ rispettivamente. Il comportamento osservato è stato riscontrato in tutte le simulazioni effettuate al variare dei parametri n_1, n_2 e Δ .

Appare evidente un comportamento periodico, del tipo passa-banda. Al generico stadio m , le frequenze di centro banda sono $f_k^m = k f_0^m$, dove k è un intero positivo e f_0^m è la

frequenza corrispondente ad una lunghezza d'onda nel vuoto pari a due volte il cammino ottico relativo allo strato più sottile presente nella struttura. Cioè: $f_0^m = 3^m c / 2\Delta$, dove c è la velocità della luce nel vuoto. Il periodo del coefficiente di riflessione allo stadio m è ovviamente f_0^m .

Le figure 2-4 mostrano chiaramente come la natura frattale del multistrato si rifletta nella struttura del coefficiente di riflessione. In particolare, osservando la figura 4 (stadio 3), si nota che la parte centrale corrispondente alla banda 7.5-10.5 GHz appare come una copia scalata di un periodo del coefficiente di riflessione allo stadio 2 (figura 3), mentre la curva corrispondente alla banda 8.5-9.5 GHz appare come una copia scalata del coefficiente di riflessione allo stadio 1 (figura 2). Allo stesso modo, allo stadio 2, il coefficiente di riflessione in una banda larga 1 GHz intorno ad una qualsiasi delle frequenze f_k^2 appare come una copia scalata di un periodo di Γ allo stadio 1. Ci si potrebbe attendere, quindi, che, ingrandendo opportunamente il coefficiente di riflessione allo stadio m , si possa ottenere il coefficiente Γ relativo ad un qualsiasi stadio $q < m$. In realtà questa procedura non consente di ottenere repliche esatte di Γ , come mostrato nelle figure 5-6. In figura 5 il coefficiente Γ allo stadio 2 è confrontato con il Γ allo stadio 3 moltiplicato per un fattore di scala pari a 1.5. L'accordo tra le due curve è ottimo nella parte centrale della banda, ma peggiora nei lobi laterali. Lo stesso comportamento si osserva in figura 6 dove viene effettuato il confronto tra il coefficiente di riflessione allo stadio 3 e allo stadio 1. Il fattore di scala nel caso in figura 6 è $(1.5)^2$. Se ne deduce che il fattore di scala relativo alla risposta elettromagnetica non dipende dai particolari stadi confrontati, ma rappresenta una caratteristica peculiare della struttura frattale. Si noti che la non perfetta *self-similarity* della risposta elettromagnetica può essere giustificata dal fatto che la struttura del multistrato non è esattamente frattale. Il multistrato, infatti, costituisce in realtà un prefrattale [1], essendo ottenuto troncando la costruzione frattale dopo un numero finito di iterazioni.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D.L. Jaggard, A.D. Jaggard, P.V. Frangos, 'Fractal Electrodynamics: Surfaces and Superlattices', in *Frontiers in Electromagnetics*, D.H. Werner, R. Mittra ed.s, IEEE Press, New York 2000.
- [2] D.L. Jaggard, A.D. Jaggard, 'Scattering from fractal superlattices with variable lacunarity', *J. Opt. Soc. Am. A*, vol.15, n.6, pp.1626-1635, June 1998.
- [3] C. Sibilia *et al.*, 'Electromagnetic mode density for finite quasi-periodic structures', *J. Opt. Soc. Am. B*, vol.15, n.7, pp.1947-1952, July 1998.
- [4] M. Born, E. Wolf, 'Principles of Optics', Cambridge University Press, Cambridge 1980.

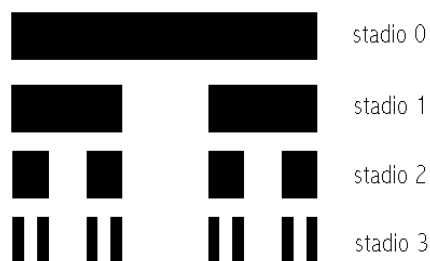


Figura 1:costruzione triadica di Cantor

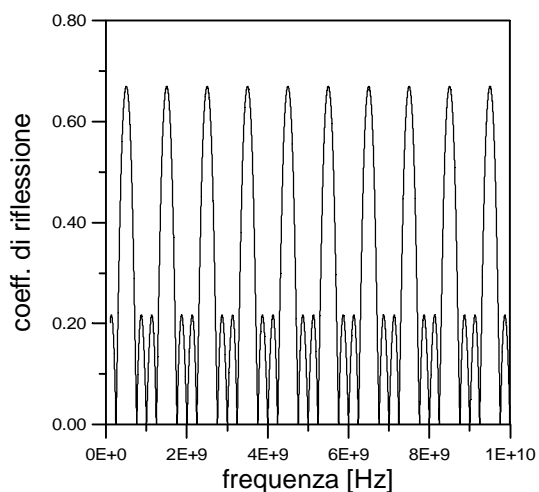


Figura 2:modulo del coefficiente di riflessione per $m=1$

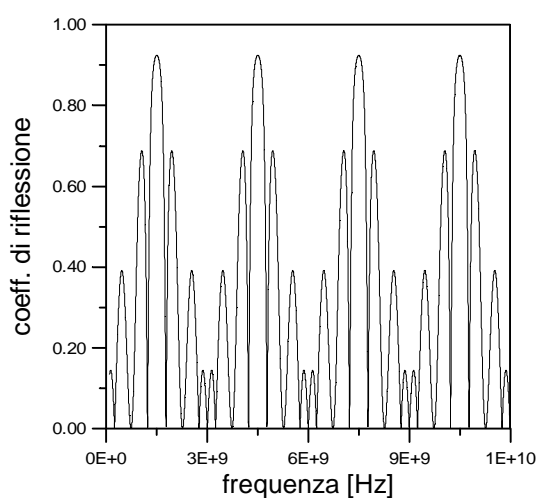


Figura 3:modulo del coefficiente di riflessione per $m=2$

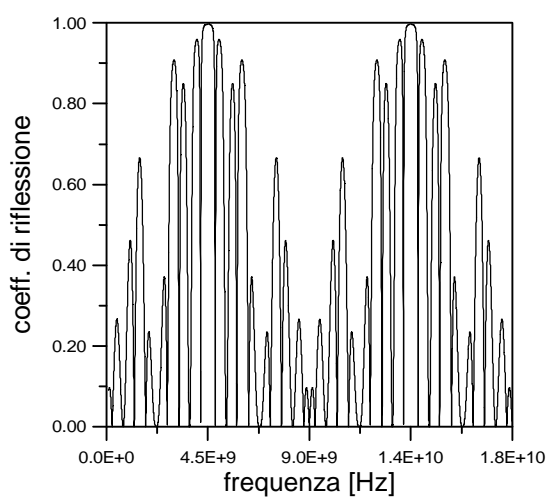


Figura 4:modulo del coefficiente di riflessione per $m=3$

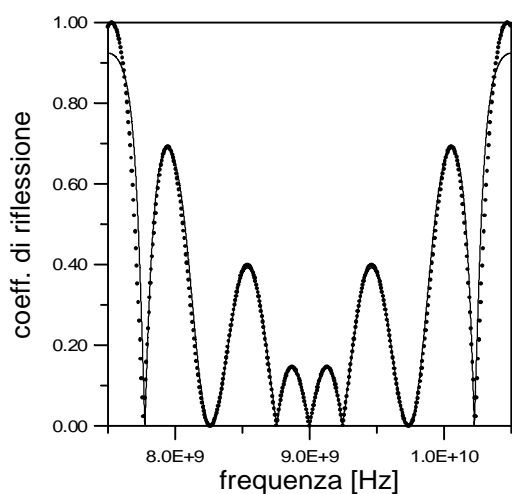


Figura 5: modulo del coefficiente di riflessione

— $m=2$

**** $m=3$ (fattore di scala: 1.5)

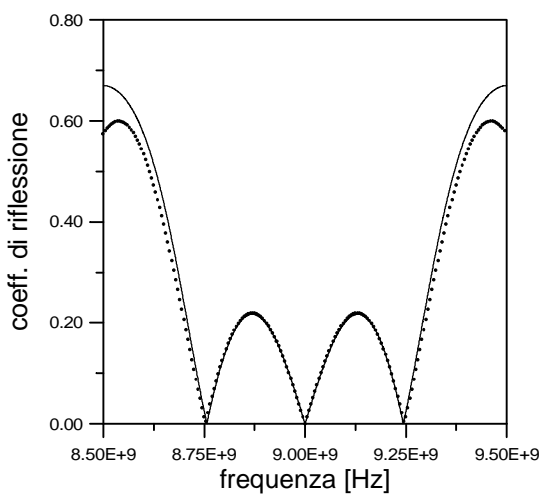


Figura 6: modulo del coefficiente di riflessione

— $m=1$

**** $m=3$ (fattore di scala: 1.5^2)