RITARDO DI GRUPPO DIFFERENZIALE MEDIO IN FIBRE SPUN

Andrea Galtarossa, Paola Griggio, Anna Pizzinat
DEI, Università di Padova, Via Gradenigo 6/A, 35131 Padova
E-mail: annap@wave.dei.unipd.it

Luca Palmieri
DIEGM, Università di Udine, Viale delle Scienze 208, 33100 Udine
E-mail: vicius@wave.dei.unipd.it

Abstract

Spinning is one of the most effective and well-known ways to reduce polarization mode dispersion of optical fibers. In spite of its popularity, a detailed theory about spin effects is still lacking. In this paper we report an analytical expression for the mean differential group delay of a randomly birefringent spun fiber. The result holds for any periodic spin function with a period shorter than the fiber beat length. Moreover such expression finds application in fiber spin design, and in the framework of a more comprehensive analysis of pulse propagation in spun fibers.

Le fibre ottiche singolo modo ideali permettono la propagazione di due modi degeneri e con polarizzazioni ortogonali. Nella realtà, inevitabili ellitticità del nucleo, tensioni interne o effetti indotti dal cablaggio (curvature, pressioni, ecc.) rompono la degenerazione dei due modi, che vengono così ad avere costanti di propagazione diverse. Questo fenomeno può essere descritto assimilando la fibra ad un mezzo birifrangente, ed ha fondamentale importanza nelle telecomunicazioni perché causa una dispersione dipendente dalla polarizzazione, nota come PMD (dall'inglese *polarization mode dispersion*). La birifrangenza apparente della fibra è in genere aleatoria sia nel tempo, sia lungo la fibra; di conseguenza, sono aleatorie anche le proprietà della PMD. Limitando al primo ordine l'analisi delle distorsioni, si può affermare che un generico impulso ottico, lanciato in una fibra affetta da PMD, dà origine in uscita a due repliche polarizzate ortogonalmente e sfasate di un intervallo temporale noto come ritardo di gruppo differenziale (DGD dall'inglese *differential group delay*).

La natura aleatoria della PMD e del DGD, comportano notevoli difficoltà nel realizzare dispositivi di compensazione efficaci, veloci e poco sensibili alla modulazione del segnale. Per questo negli ultimi tempi la ricerca si è focalizzata sulla possibilità di controllare il fenomeno all'origine, mediante la realizzazione di nuovi tipi di fibra a bassissimo DGD. A tale scopo, la tecnica più promettente consiste nell'applicare alla fibra, durante il processo di filatura, una torsione (d'ora in poi denominata *spin*). In letteratura si trovano vari profili di spin [1, 2] la cui efficacia dipende fortemente dalle caratteristiche di birifrangenza della fibra, vale a dire dalla lunghezza di battimento L_B e dalla lunghezza di correlazione L_F [3]. Anche se tale tecnica è utilizzata ampiamente e con successo, la stima dei suoi effetti è molto spesso affidata a metodi empirici, mancando una trattazione analitica del fenomeno. In questo lavoro viene

presentata una formula per il calcolo del valore medio del ritardo di gruppo differenziale, valida nel caso in cui il profilo di spin sia una funzione periodica della distanza (caso molto comune in pratica).

Al fine di introdurre il principale risultato esposto in questo lavoro, si consideri una fibra a birifrangenza aleatoria, di lunghezza L molto maggiore della lunghezza di correlazione, L_F. Si applichi a questa fibra uno spin di periodo p, descritto dalla funzione $A(z)$; in tal caso, il DGD medio della fibra dopo l'applicazione dello spin è dato dalla seguente formula:

$$\langle \Delta\tau \rangle = \sqrt{\frac{C^2 + S^2}{C}} \, \langle \Delta\tau_{\mathsf{un}} \rangle \,, \tag{1}$$

dove $\langle \Delta\tau_{\mathsf{un}} \rangle$ è il valore medio del DGD che la fibra avrebbe nel caso non fosse stata sottoposta al processo di spin, mentre i due parametri C e S sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\gamma}{p^2} \int_0^p \int_0^p \exp(-2\sigma^2 u) \cos[A(t) - A(t-u)] dt \, du \,, \\ S &= \frac{\gamma}{p^2} \int_0^p \int_0^p \exp(-2\sigma^2 u) \sin[A(t) - A(t-u)] dt \, du \,, \end{aligned} \tag{2}$$

con $2\sigma^2 = 1/L_F$ e $\gamma = 2\sigma^2 p/[1 - \exp(-2\sigma^2 p)]$.

Si noti che l'eq. (1) vale per qualsiasi funzione di spin di periodo p sotto l'ipotesi $p^2 \ll L_B^2$. Questa condizione è compatibile con gli attuali processi di produzione in quanto la lunghezza di battimento varia tipicamente tra 5 e 50 m, mentre il periodo di spin può essere impostato tra 1 e 15 m [1, 2].

La dimostrazione dell'equazione (1) è alquanto complessa e non fornisce alcuna spiegazione fisica del risultato; per questo ne verranno descritti solo i passi principali. Innanzitutto, si supponga che la fibra sia descritta dal modello proposto da Way e Menyuk nel riferimento [4]. In base a questo modello l'orientazione del vettore di birifrangenza varia in maniera aleatoria, mentre il suo modulo, $b = 2\pi/L_B$, è fisso. Per mezzo della teoria delle equazioni differenziali stocastiche [5], il valore medio del DGD può essere determinato mediante l'equazione differenziale $d\langle \Delta\tau^2(z) \rangle / dz = 2b_\omega \langle \Omega_1(z) \rangle$, dove b_ω è la derivata in frequenza di b e $\Omega_1(z)$ rappresenta la prima componente del vettore di dispersione $\bar{\Omega}$. A sua volta, l'evoluzione della media di tale vettore è descritta dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{d\langle \bar{\Omega} \rangle}{dz} = \begin{pmatrix} -2\sigma^2 & \alpha(z) & 0 \\ -\alpha(z) & -2\sigma^2 & -b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \langle \bar{\Omega} \rangle + \begin{pmatrix} b_\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,, \tag{3}$$

dove $\alpha(z) = dA/dz$.

Purtroppo il sistema (3) non può essere risolto in forma chiusa; tuttavia, è possibile studiarne la stabilità. Infatti, utilizzando il secondo metodo di Lyapunov, si dimostra che per qualsiasi condizione iniziale, la soluzione converge su un'orbita di periodo p, che risulta anche essere l'unica soluzione possibile di periodo p del sistema (3). Di conseguenza, si può affermare che per valori elevati di z (ossia per fibre sufficientemente lunghe) $\langle \Delta\tau^2(z) \rangle$ è dato dall'espressione asintotica di $\langle \Omega_1(z) \rangle$, la quale

coincide con la soluzione p-periodica del sistema (3). Quindi, adesso il problema è trovare tale soluzione periodica.

Dato che ciascun termine dell'equazione (3) è p-periodico, è possibile espanderne i termini in serie di Fourier, per poi sfruttare l'ipotesi $p^2 \ll L_B^2$ come è stato già fatto nel riferimento [1]. Il risultato di tale operazione porta a semplificare il sistema (3) nel seguente modo:

$$\frac{d\bar{y}}{dz} = \begin{pmatrix} -2\sigma^2 & \alpha(z) \\ -\alpha(z) & -2\sigma^2 \end{pmatrix} \bar{y}(z) + b_\omega \begin{pmatrix} 1 \\ C^{-1}S \end{pmatrix} , \tag{4}$$

dove $\bar{y} = (\langle\Omega_1\rangle, \langle\Omega_2\rangle)^T$, e C ed S sono definiti nelle eqq. (2). Adesso, è possibile scrivere esplicitamente la soluzione p-periodica del sistema (4), che risulta essere:

$$\bar{y}(z) = b_\omega[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}(z,0)]^{-1} \int_0^p \boldsymbol{R}(z, p-t)\bar{f}\, dt ,$$

dove $\bar{f} = (1,\, C^{-1}S)^T$, $\boldsymbol{I}$ è le matrice identità, $\boldsymbol{R}(z,t) = \boldsymbol{Y}(z+p)\boldsymbol{Y}^{-1}(z+t)$ e

$$\boldsymbol{Y}(z) = \exp(-2\sigma^2 z) \begin{pmatrix} \cos A(z) & \sin A(z) \\ -\sin A(z) & \cos A(z) \end{pmatrix} .$$

Visto che ora è disponibile l'espressione analitica di $\langle\Omega_1(z)\rangle$, è possibile calcolare $\langle\Delta\tau^2(z)\rangle$ e, ricordandosi che il DGD è una variabile aleatoria di Maxwell per cui risulta $\langle\Delta\tau^2\rangle = 3\pi\langle\Delta\tau\rangle^2/8$, si arriva ad ottenere il risultato cercato.

Un aspetto critico della formula (1) è che essa è stata derivata basandosi su di un modello di birifrangenza poco realistico. Infatti, tutti i risultati sperimentali finora ottenuti indicano che la birifrangenza delle fibre non è a modulo costante, come finora supposto, ma evolve in maniera aleatoria. Al fine di valutare l'effettiva utilità della (1), la formula è stata confrontata con i risultati ottenuti mediante simulazioni numeriche basate su un modello di birifrangenza a modulo variabile, più aderente alla realtà, proposto nel riferimento [4]. L'esito del confronto nel caso di spin sinusoidale è mostrato in fig. 1: i risultati teorici (curva continua) sono in ottimo accordo sia i risultati numerici ottenuti con il modello a modulo fisso (cerchi), sia con quelli forniti dal modello a modulo variabile (triangoli). Nel primo caso è verificata la validità delle approssimazioni fatte per derivare la formula (1), nel secondo caso, invece, la validità di tale formula è estesa anche al più realistico caso di birifrangenza a modulo variabile.

La formula (1) trova applicazioni in svariati ambiti, uno dei quali è la progettazione di fibre a bassissimo DGD. Infatti, è possibile definire il seguente fattore di riduzione indotto dallo spin: $\Phi = [(C^2 + S^2)/C]^{1/2}$, che sintetizza tutti gli effetti dello spin sul DGD di una fibra. Questo fattore dipende dalla particolare funzione di spin $A(z)$ e dalla lunghezza di correlazione, mentre è indipendente da L_B grazie all'ipotesi $p^2 \ll L_B^2$. La fig. 2 mostra l'evoluzione di Φ come funzione dell'ampiezza A_0 per la seguente funzione di spin:

$$A(z) = A_0 \left(\sin\frac{2\pi z}{p} + \cos\frac{4\pi z}{p} \right) \tag{5}$$

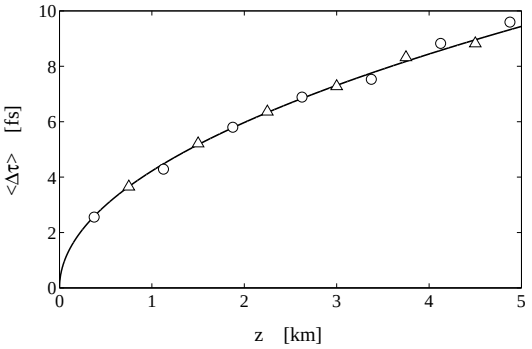

Fig. 1. Evoluzione del DGD medio per una fibra con spin $A(z) = A_0 \sin(2\pi z/p)$, con $A_0 = 4.8$ rad e $p = 4$ m. La curva continua si riferisce alla (1), mentre i cerchi e i triangoli sono i risultati numerici ottenuti nelle ipotesi di modulo costante ovvero aleatorio, rispettivamente.

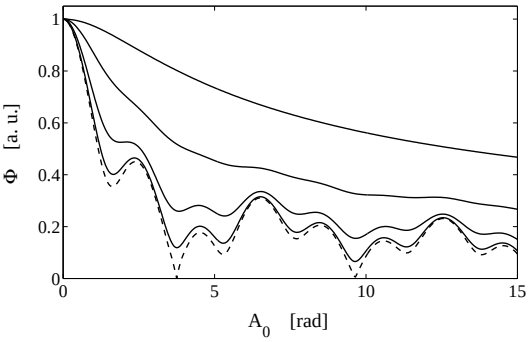

Fig. 2. Andamento di Φ nel caso dello spin specificato nella (5), con $p = 4$ m. Le curve continue, dalla più alta alla più bassa, corrispondono a $L_F = 0.1, 0.3, 0.8$ e 2 m. La curva a tratteggio corrisponde al caso $L_F \to +\infty$.

con $p = 4$ m. Le curve a tratto continuo dalla più alta alla più bassa corrispondono a $L_F = 0.1\,,\ 0.3\,,\ 0.8$ e 2 metri rispettivamente. La curva a tratteggio rappresenta il caso $L_F \to +\infty$, vale a dire il caso di fibra a mantenimento di polarizzazione.

Si può notare che Φ è sempre minore di 1, perciò lo spin riduce il DGD in ogni caso. Questo risultato è stato confermato numericamente per tutte i profili di spin testati e d'altra parte sembra fisicamente ragionevole. Inoltre, si osservi che Φ presenta numerosi minimi locali la cui posizione, almeno in prima approssimazione, non dipende da L_F. Si può così affermare che, dato un generico profilo di spin di ampiezza A_0, esistono dei valori di A_0 indipendenti dalle proprietà della fibra (ossia indipendenti da L_B ed L_F), che minimizzano in senso relativo il valore del DGD. L'efficacia assoluta di tale riduzione dipende comunque da L_F.

In conclusione, è stata calcolata l'espressione analitica del DGD medio di fibre ottiche con spin periodico. La formula, di validità generale e sottoposta all'unico vincolo che il periodo dello spin sia minore della lunghezza di battimento della fibra, trova importanti applicazioni nella progettazione di fibre a bassissimo DGD e nello studio della propagazione di impulsi in fibre spun.

References

1. A. Galtarossa, L. Palmieri, e A. Pizzinat, *J. Lightwave Tech.*, vol. 19, pp. 1502–1512, 2001.
2. M. J. Li e D. A. Nolan, *Opt. Lett*, vol. 23, pp. 1659–1661, 1998.
3. A. Galtarossa, L. Palmieri, M. Schiano, e T. Tambosso, *OSA Opt. Lett.*, vol. 25, pp. 384–386, 2000.
4. P. K. A. Wai e C. R. Menyuk, *J. Lightwave Tech.*, vol. 14, pp. 148–157, 1996.
5. B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlang, Berlin, 2000.