

ANALISI DI STRUTTURE PERIODICHE NON LINEARI MEDIANTE IL FORMALISMO DELLE MATRICI DI TRASFERIMENTO

A. Parini, G. Bellanca, S. Trillo

Dipartimento di Ingegneria, Università degli Studi di Ferrara
via Saragat,1 44100, Ferrara
aparini@ing.unife.it, gbellanca@ing.unife.it, strillo@ing.unife.it

Abstract

The Transfer Matrix Method (TMM) is used to investigate the multistable input-output characteristic of a periodic stratified medium with nonlinear response of the Kerr type. Results are compared with those obtained using the traditional Coupled Mode Theory (CMT) approach. It is shown that this method becomes inaccurate when the linear (or nonlinear) index change grows larger than a characteristic value. The TMM approach, on the contrary, doesn't suffer from this constraint. However, to guarantee the accuracy, the transfer matrices should be applied on a spatial scale much shorter than the period of the stratification.

INTRODUZIONE

L'impiego di dielettrici con variazione periodica dell'indice di rifrazione risulta essere di importanza notevole nei moderni sistemi di telecomunicazione ottica, grazie alla possibilità di realizzare dispositivi utilizzabili per una vasta classe di applicazioni (filtri add-drop per i sistemi WDM, compensatori di dispersione, linee di ritardo variabili, rigeneratori ottici etc.). Strutture di questo tipo si ottengono modulando periodicamente la parte lineare dell'indice di rifrazione, determinando così una dipendenza della risposta del dispositivo dalla lunghezza d'onda della radiazione che si propaga al suo interno. Se nel reticolo, contemporaneamente agli effetti lineari, si manifestano anche fenomeni legati ad un'interazione non lineare fra campo elettromagnetico e materiale, la risposta viene a dipendere contemporaneamente dalla lunghezza d'onda e dalla intensità del segnale luminoso. Caratteristica fondamentale di questi dispositivi, che li rende particolarmente promettenti al fine di realizzare reti di elaborazione dell'informazione totalmente ottiche, è il comportamento multistabile della relazione ingresso-uscita, con curva di isteresi anche molto marcate e repentine transizioni tra stati a bassa ed alta trasmissione. Lo studio di tali strutture richiede la derivazione di modelli numerici in grado di simulare accuratamente le complesse dinamiche proprie dei sistemi non lineari. Il metodo tradizionalmente utilizzato è basato sulla Teoria dei Modi Accoppiati non lineare (CMT) [1] che però, essendo un approccio di tipo perturbativo, richiede che le variazioni d'indice presenti nella struttura siano deboli rispetto al valore medio degli indici di rifrazione lineari del reticolo. Per superare tale vincolo, in questo lavoro si è seguito l'approccio TMM (Transfer Matrix Method) [2], appositamente esteso per la trattazione degli effetti non lineari di tipo Kerr. Con questo metodo, che non introduce semplificazioni sulle equazioni che descrivono il dispositivo in esame, risulta possibile l'analisi di reticoli con salto d'indice e coefficiente di non linearità comunque elevati. La presenza di variazioni dell'intensità totale che sono risonanti con il reticolo, però, richiede l'applicazione del metodo su una scala fine di lunghezza.

MODELLO MATEMATICO

Preso in considerazione un mezzo dielettrico periodico con variazione dell'indice di rifrazione rappresentabile mediante un'onda quadra (Fig. 1), indicati con n_1 ed n_2 gli indici di rifrazione degli strati costituenti il reticolo e con $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ il periodo della struttura, dove Λ_j ($j=1,2$) è la lunghezza della sezione omogenea con indice n_j , il campo elettrico all'interno di ogni strato omogeneo può essere espresso come sovrapposizione di un'onda propagante \hat{E}_+ e di un'onda contro-propagante \hat{E}_- , ovvero $E(Z) = \hat{E}_+ + \hat{E}_-$.

Chiamando $E_{j\pm}^{(n)}$ le ampiezze di tali onde sul bordo destro del j -esimo strato dell' n -esimo periodo, si ottiene la seguente rappresentazione del campo:

$$E_{\pm}^{(n)}(Z) = \begin{cases} E_{1\pm}^{(n)} \cdot \exp[\mp i \cdot k_1 \cdot (Z - Z_1^{(n)})] & \text{layer } n_1 \\ E_{2\pm}^{(n)} \cdot \exp[\mp i \cdot k_2 \cdot (Z - Z_2^{(n)})] & \text{layer } n_2 \end{cases} \quad (1)$$

dove $Z_1^{(n)} \equiv (n-1)\Lambda + \Lambda_1$, $Z_2^{(n)} \equiv (n-1)\Lambda + \Lambda_1 + \Lambda_2 = n\Lambda$ e Z rappresenta la distanza di propagazione lungo il reticolo di lunghezza totale $L = N \cdot \Lambda$ ($0 \leq Z \leq L$). Nel caso lineare, il formalismo TMM consente il calcolo delle ampiezze del campo $U^{(n)} = [E_{2+}^{(n)} \ E_{2-}^{(n)}]^T$ (con T operatore trasposizione) in ogni strato mediante la relazione $U^{(n-1)} = [M] \cdot U^{(n)}$, dove $[M] = [M_1] \cdot [M_2]$ è la matrice di trasferimento complessiva associata ai due strati di un periodo del reticolo. Le matrici $[M_{1,2}]$ dipendono solo da $\Lambda_{1,2}$ e dai rispettivi vettori d'onda $k_{1,2} = k_0 n_{1,2}$.

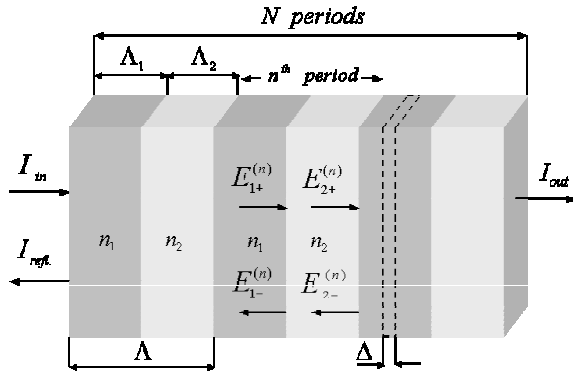


Fig. 1 Schema del reticolo di Bragg.

Con valori elevati di campo all'interno del reticolo, l'effetto Kerr non è più trascurabile ed il vettore d'onda diventa dipendente dall'intensità $I = \rho_j |E(Z)|^2$ attraverso la variazione di indice non lineare $\Delta n_{nl} = n_{2I} I$. In questo regime di funzionamento, il metodo TMM può ancora essere applicato, a condizione che il vettore d'onda nel j -esimo strato sia ora espresso dalla $k_j = (n_j + \Delta n_{nl}) = k_0(n_j + n_{2I} I)$.

Nell'approccio usualmente seguito in letteratura [3]-[4], l'intensità I viene calcolata come somma dei campi incidente e riflesso, da cui risulta un vettore d'onda nella forma:

$$k_j = k_0 \left[n_j + n_{2I} \rho_j \left(|E_{j+}^{(n)}|^2 + |E_{j-}^{(n)}|^2 \right) \right] \quad j = 1, 2 \quad (2)$$

Il calcolo dei campi procede a ritroso lungo la struttura a partire dalla condizione al contorno assegnata sulla sezione finale $Z=L$ data da $U^N = [E_{2+}^N \ 0]^T \equiv [\sqrt{I_{out}/\rho_2} \ 0]^T$, in cui I_{out} è l'intensità di uscita, $\rho_j = n_j / (2\eta_0)$ e $\eta_0 = 120 \pi \Omega$ è l'impedenza del vuoto. Per ogni frequenza, il metodo TMM consente di calcolare il campo incidente e riflesso su ogni sezione del reticolo e di caratterizzare quindi in modo completo il comportamento del dispositivo.

Questa espressione, però, non è corretta e produce, come verrà mostrato in seguito, una sottostima della non linearità. Infatti, poiché l'effetto Kerr è funzione puntuale dell'intensità $I(Z)$, nel j -esimo strato dell' n -esimo periodo l'intensità locale deve essere scritta come:

$$I(Z) = \rho_j \left(|E_{j+}^{(n)} + E_{j-}^{(n)}|^2 \right) = \rho_j \left\{ |E_{j+}^{(n)}|^2 + |E_{j-}^{(n)}|^2 + E_{j+}^{(n)} (E_{j-}^{(n)})^* \exp[i 2 k_j (Z - Z_j^{(n)})] + c.c. \right\} \quad (3)$$

dalla quale risulta evidente l'esistenza di un termine di interferenza rapidamente oscillante, determinato dalla presenza degli esponenziali, che nell'intorno della frequenza di Bragg è risonante con il periodo del reticolo. Tale termine si ritrova anche nella formulazione CMT che, scritta in prossimità della m -esima frequenza di risonanza Bragg ω_{Bm} (definita dalla condizione $m k_g = 2 k \omega_{Bm}$ con $k_g = 2\pi/\Lambda$), è espressa dalle:

$$\mp i \frac{\partial E_{\pm}}{\partial Z} = \Gamma_m E_{\mp} e^{\mp i \Delta k_m Z} + \chi \left(|E_{\pm}|^2 + 2 |E_{\mp}|^2 \right) E_{\pm} \quad (4)$$

La presenza nella parte non lineare di un termine di cross-coupling ($2 |E_{\mp}|^2$) di valore doppio rispetto a quello di self-coupling ($|E_{\pm}|^2$), è dovuta proprio al termine oscillatorio contenuto nella espressione dell'intensità. Trascurarlo equivale ad attribuire erroneamente il medesimo peso ai due termini di accoppiamento non lineare e, in definitiva, a sottostimare l'impatto dell'effetto Kerr. Nella (4), $\Delta k_m = 2 k(\omega) - m k_g$ costituisce il detuning rispetto alla frequenza Bragg, $\chi = \rho k_0 n_{2l}$ è il coefficiente di non linearità e $\Gamma_m = k_0 \Delta n_m$ è il coefficiente di accoppiamento lineare che, in prossimità della risonanza Bragg $k_0 = 2\pi/\lambda_{Bm}$ e per un profilo d'indice ad onda quadra (coefficienti di Fourier $\Delta n_m = |n_2 - n_1|/(m\pi)$, m dispari), vale $\Gamma_m = 2|n_2 - n_1|/(m\lambda_{Bm})$.

Per valutare correttamente la correzione non lineare da introdurre nella formulazione TMM, a causa del legame puntuale fra la $I(Z)$ ed il vettore d'onda $k_j k_0 (n_{j+} + n_{2l} I(Z))$, il calcolo delle matrici deve essere eseguito per strati di dimensioni sensibilmente inferiori a quelle del periodo del reticolo. Dalle simulazioni effettuate si visto che è bene mantenere il rapporto fra passo del periodo e discretizzazione dello strato $\Lambda/\Delta > 100$.

RISULTATI

Nel seguito sono riportati i risultati di alcune simulazioni effettuate mediante l'algoritmo TMM non lineare. Il comportamento multistabile delle caratteristiche ingresso-uscita è confrontato con quello derivante dall'approccio CMT. In entrambe le situazioni la struttura, simulata alla lunghezza d'onda di Bragg ($\lambda_0 = 1\mu\text{m}$ per il reticolo in esame), è rappresentata da un reticolo di 100 periodi, con passo pari a 250nm ed indice di rifrazione medio $n_0 = 2$. Nel primo caso (Fig. 2), utilizzato per validare i risultati dell'approccio TMM proposto in questo lavoro, il reticolo presenta un salto d'indice contenuto (Shallow Grating, $\Delta n = 0.05$). Come è possibile osservare, il calcolo nella TMM del termine di accoppiamento non lineare secondo la (2) riproduce un comportamento non corretto del dispositivo mentre, utilizzando l'espressione riportata in (3), l'andamento della TMM risulta in perfetto accordo con quanto previsto dalla CMT. Nel secondo caso (Fig. 3) il salto d'indice è maggiore ($\Delta n = 0.2$) e l'approccio CMT risulta inadeguato. L'algoritmo TMM correttamente implementato invece, non avendo limiti in tale senso, può ancora essere utilizzato per caratterizzare completamente il dispositivo. Nei grafici, le intensità di campo sono normalizzate rispetto alla $I_{rif} = |n_2 - n_1|/(\pi n_{2l})$. L'errore relativo e della CMT rispetto al metodo TMM è stato calcolato secondo la

$$e = \frac{1}{S} \sum_s \left| I_{in.TMM}^{(s)} - I_{in.CMT}^{(s)} \right| / I_{in.TMM}^{(s)} \quad (S > 300 \text{ è il numero di punti utilizzato per determinare la caratteristica di ingresso-uscita con l'algoritmo TMM}).$$

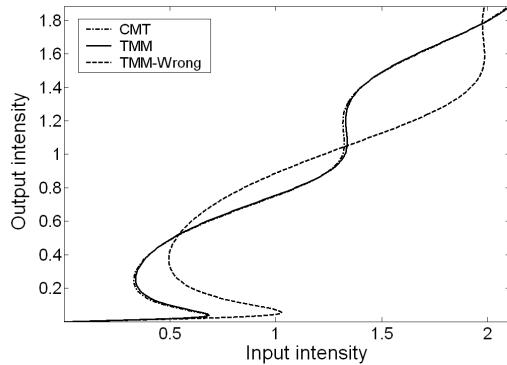


Fig. 2 Andamento della curva di risposta non lineare nell'ipotesi di reticolo a basso salto d'indice ($\Delta n=0.05$).

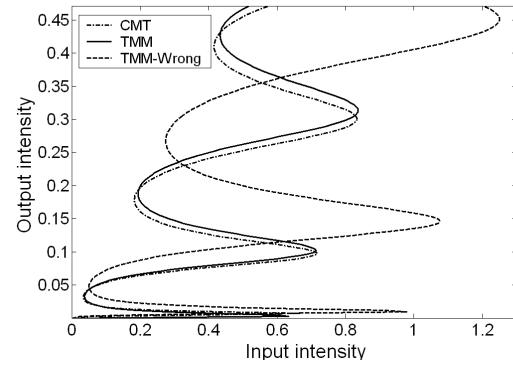


Fig. 3 Andamento della curva di risposta non lineare per reticolo con salto d'indice maggiore ($\Delta n=0.2$).

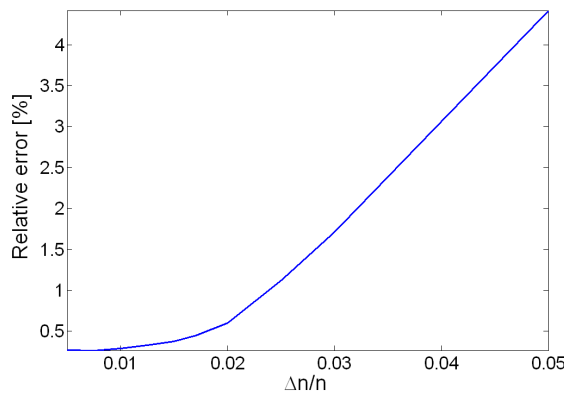


Fig. 4 Deviazione dei risultati della CMT rispetto alla TMM al variare del salto d'indice relativo.

Lo scostamento fra i risultati degli approcci CMT e TMM al variare del salto d'indice relativo $\Delta n/n$ e per valori costanti del prodotto accoppiamento per lunghezza del reticolo ($z_L = \Gamma_1 L = 5$) sono riportati in Fig. 4. Come anticipato, al crescere del salto d'indice relativo, decadendo progressivamente la validità delle ipotesi di debole perturbazione, l'approccio CMT risulta non essere più valido e lo scostamento con i risultati della TMM (nella sua corretta implementazione) risulta evidente.

CONCLUSIONI

In questo lavoro è dimostrata la possibilità di utilizzare la tecnica TMM per la caratterizzazione di strutture periodiche non lineari. Il metodo, validato per confronto con l'approccio CMT nel caso di propagazione in un reticolo a basso salto d'indice, richiede che la matrice di trasferimento venga calcolata per strati di dimensioni sensibilmente inferiori a quelle del periodo del reticolo.

RINGRAZIAMENTI

Lavoro svolto con finanziamento MIUR (60% e COFIN 2000).

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. G. Winful, J. H. Marburger, E. Garmire, Appl. Phys. Lett. **35**, 379 (1979).
- [2] A. Yariv, P. Yeh, *Optical waves in Crystals* (J. Wiley and Sons, 1984).
- [3] L. Brzozowski, E. H. Sargent, D.E. Pelinovsky, "Transmission regimes of periodic nonlinear optical structures", Phys. Rev. E **62**, R4536 (2000).
- [4] C. Sibilia in *Nanoscale linear and nonlinear optics*, M. Bertolotti, C.M. Bowden, C. Sibilia, Eds., AIP Conference Proceedings, Vol. **560** (American Institute of Physics, Melville, New York, 2001).