# Riduzione Esatta ad Integrale di Linea del Campo di Ottica Fisica Reirradiato da un'Apertura o da una Superficie Piana Perfettamente Conduttrice, Illuminata da un Dipolo Elementare

Matteo Albani
malbani@ingegneria.unime.it
Dip. Fisica della Materia e Tecnologie Fisiche Avanzate, Università di Messina, salita Sperone 31, 98166 Messina, Italy.

## Abstract

In questo articolo viene presentata una rappresentazione, in forma di integrale di linea, per l'integrale di radiazione di Ottica Fisica (PO) relativo ad un'apertura in uno schermo, o alla reirradiazione di una superficie piana perfettamente conduttrice, illuminata da un dipolo elementare elettrico o magnetico. La principale applicazione di questo risultato riguarda l'accelerazione dell'integrazione numerica di PO per oggetti elettricamente estesi, eventualmente in sinergia con tecniche incrementali per il calcolo della diffrazione (Coefficienti incrementali di diffrazione ILDC, Teoria Fisica della Diffrazione PTD o Teoria Incrementale della Diffrazione ITD). La possibilità di tale riduzione è nota in letteratura e non è unica. La formulazione proposta risolve i problemi di implementazione numerica delle tecniche tradizionali senza perdere l'interpretabilità fisica del risultato. Tale requisito permette di estrapolare dalla presente formulazione anche uno strumento di modellistica elettromagnetica da utilizzarsi in situazioni approssimate con garanzie di attendibilità della stima. Alcuni esempi numerici dimostrano l'efficacia e la correttezza della formulazione presentata.

## Introduzione

La possibilità di poter ridurre l'integrale di radiazione di ottica fisica, che è costituzionalmente un integrale superficiale, ad integrale di linea è stata dimostrata per la prima volta da Maggi a Messina oltre un secolo fa [1]. Tale risultato formalizza la congettura di Young, secondo la quale il fenomeno della diffrazione si origina da perturbazioni ondose provenienti dai bordi delle strutture radianti. Questo lavoro viene tuttavia pressoché ignorato dalla comunità scientifica e la paternità del risultato venne a lungo attribuita a Rubinowicz [2] che indipendentemente giunse a conclusioni analoghe assai più tardi. Il taglio di tutta la produzione scientifica "pionieristica", egregiamente riassunta in [6], è appunto quello di dimostrare l'esistenza di onde di bordo (*beugungswelle*) responsabili della formazione del campo diffratto. Il campo reirradiato da un'apertura viene infatti scomposto nella somma di un contributo diretto di illuminazione che si annulla bruscamente nella regione d'ombra, ossia il contributo di Ottica Geometrica (GO), più un contributo di campo diffratto che nasce dalla circuitazione di un opportuno potenziale vettore [3] sul bordo dell'apertura radiante. Il campo diffratto presenta la giusta discontinuità per compensare il comportamento della GO e produrre un campo totale radiato continuo attraverso i confini d'ombra. La circuitazione lungo il bordo viene dunque interpretata come la sovrapposizione di moti ondosi provenienti dai punti di bordo ed eccitati dal campo incidente. Rubinowicz fa notare come questo risultato, ottenuto in [3] attraverso una procedura matematica, è deducibile applicando il principio di Helmholtz-Huygens ad una opportuna superficie; fornendo così una chiara interpretazione fisica. I risultati vengono estesi dal caso scalare ottico-acustico a quello elettromagnetico attraverso l'uso della forma di Kottler [7] per l'integrale di radiazione di Kirchhoff. Gli stessi concetti sono ripresi in chiave moderna da Asvestas [8]-[9] spostando l'attenzione su la determinazione di una rappresentazione adatta ad una implementazione numerica efficiente. Decomporre il campo radiato totale nella somma del campo di GO e del campo diffratto ha infatti come effetto che la circuitazione lungo il bordo dell'apertura debba ricostruire un contributo di campo discontinuo. Questo viene ottenuto integrando dei contributi di bordo che presentano un comportamento singolare. L'integrazione numerica di una funzione singolare, sebbene possibile, presenta problemi che tendono a vanificare il guadagno in termini computazionali fornito dalla riduzione dell'integrale superficiale ad integrale di linea. Asvestas riesce a fornire una formulazione alternativa che costruisce il campo radiato totale unicamente come integrale di linea. Essendo il campo radiato totale continuo, la funzione integranda risulta adesso continua e di rapida ed efficiente integrabilità numerica. Tuttavia la sua tecnica, basata su una procedura prettamente matematica, fa perdere l'interpretazione fisica della soluzione, fornita invece dai risultati precedenti. In [10] una formulazione basata sul teorema della divergenza fornisce in parte una rappresentazione geometrica per l'approccio matematico usato in [8]-[9]. Tuttavia il risultato finale, valido per piastre piane perfettamente conduttrici illuminate da un dipolo elettrico, è costituito da un grande numero di termini non interpretabili fisicamente, che manifestano un comportamento singolare in certe direzioni di osservazione. Questo ne rende l'applicabilità alquanto complessa e non risolve i problemi di efficienza numerica. In [11] e [12] si propongono applicazioni particolari rispettivamente per le soluzioni di Asvestas e Rubinowicz. Nel presente articolo si propone una nuova formulazione del problema che unisca l'efficienza numerica di Asvestas recuperando però la semplicità implementativa e l'interpretabilità fisica di Rubinowicz. A questo proposito si sottolinea che il contributo incrementale di campo diffratto di PO (cioè l'integranda della rappresentazione esatta in integrale di linea) non è unico; infatti aggiungendo un arbitrario campo irrotazionale all'integranda non si modifica il valore dell'integrale sul contorno

chiuso. La formulazione qui proposta è basata sull'applicazione del teorema di Equivalenza ad un'opportuna superficie costituita da un cono proiettante che inviluppa l'apertura o la superficie reirradiante, con vertice nel punto di osservazione; secondo la filosofia usata in [4]. Grazie ad opportune modificazioni però il nostro integrale di linea non ricostruisce solo il campo diffratto, che essendo discontinuo sui confini d'ombra richiede un'integranda singolare; al contrario, seguendo Asvestas, ricostruiamo il campo totale reirradiato per mezzo di una integranda non-singolare ed adatta ad una integrazione numerica veloce. L'integranda risulta così costituita dalla somma di un contributo di campo diffratto più un nuovo contributo che definiamo di Ottica Geometrica Incrementale (IGO). Esso consiste infatti in una porzione infinitesima del campo di GO da associarsi a ciascun contributo incrementale di campo diffratto. L'integrazione separata del campo diffratto incrementale e di IGO darebbero rispettivamente luogo al campo diffratto e al campo di GO. Così come il campo diffratto ed il campo di GO sono discontinui in modo opposto per cui la loro somma, vale a dire il campo totale, è continuo; allo stesso modo, a livello incrementale, cioè per ciascun punto del bordo diffrangente, la singolarità del campo diffratto incrementale di Rubinowicz viene compensata da una singolarità opposta presente nel contributo di IGO.

## *Formulazione*

Trattiamo per semplicità espositiva il caso e scalare e consideriamo un'apertura $A$ in uno *schermo nero* (perfettamente assorbente) illuminato da un campo incidente $U^i$. Il campo radiato dall'apertura in un punto $P$ è espresso dall'integrale di radiazione di Kirchhoff

$$U^A(P) = \iint_A U^i(Q)\tfrac{\partial}{\partial n}G(Q,P) - \tfrac{\partial}{\partial n}U^i(Q)G(Q,P)\,dS \tag{1}$$

dove $Q$ indica il punto di integrazione su $A$ e $G(Q,P) = \frac{e^{-jk|P-Q|}}{4p|P-Q|}$ è la funzione di Green dello spazio libero. Secondo la posizione del punto di osservazione $P$ rispetto alla sorgente del campo, distinguiamo due casi (Fig. 1). Prima consideriamo il caso in cui $P$ giace dalla parte in luce dello schermo, cioè dalla parte dello schermo da cui incide il campo illuminante. In questo caso possiamo seguire la procedura delineata in [4]. Costruiamo un tronco di cono $V$ proiettando il punto di osservazione attraverso ciascun punto del bordo dell'apertura (Fig. 2). Il volume $V$ si estenderà nella regione d'ombra dietro lo schermo, cioè dalla parte opposta rispetto alla sorgente illuminante. Applicando il teorema di Helmholtz-Huygens al volume $V$, libero da sorgenti, otteniamo

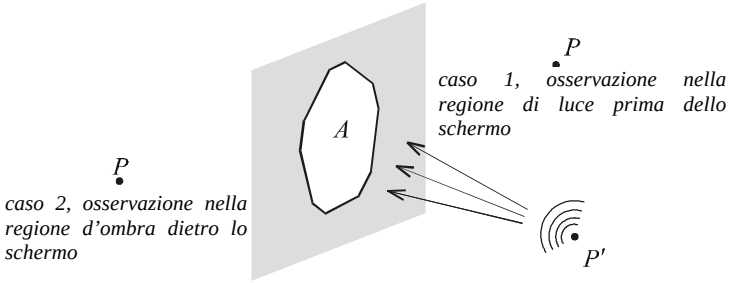


Fig. 1 Tipologie di situazione contemplate nella formulazione: caso 1 (sinistra) e 2 (destra).

$$\iint_{A+S} U^i(Q)\tfrac{\partial}{\partial n}G(Q,P) - \tfrac{\partial}{\partial n}U^i(Q)G(Q,P)\,dS = 0\,. \tag{2}$$

Perciò il campo radiato dall'apertura $A$ può essere alternativamente calcolato come meno il campo radiato dalla superficie laterale $S$ del tronco di cono. Quest'ultimo integrale può essere rimappato come un integrale di linea lungo il bordo $\Gamma$ dell'apertura, di un integrale interno lungo strisce semiinfinite con allargamento sferico; il differenziale di superficie diventa $dS = \left|\hat{r}\times\hat{\ell}\right|\frac{s}{r}ds\,d\ell$. Inoltre, per come è stato costruita la superficie, $\frac{\partial}{\partial n}G(Q,P)$ si annulla su $S$. Notando che il versore normale alla striscia è $\hat{n} = \hat{r}\times\hat{\ell}\Big/\left|\hat{r}\times\hat{\ell}\right|$, otteniamo

$$U^A = \oint_\Gamma \left(\tfrac{1}{4p\,r}\hat{r}\times\int_r^\infty \nabla U^i(P-\hat{r}s)e^{-jks}ds\right)\cdot\hat{\ell}\;\;d\ell\,. \tag{3}$$

Nel caso di onda incidente sferica $U^i(P) = G(P,P')$ prodotta da una sorgente isotropa puntiforme in $P'$, l'integrale più interno può essere chiuso analiticamente ottenendo

$$U^A = \oint_\Gamma \frac{e^{-jkr}}{4p\,r}\frac{e^{-jkr'}}{4p\,r'}\frac{\hat{r}\times\hat{r}'}{1-\hat{r}\cdot\hat{r}'}\cdot\hat{\ell}\;\;d\ell\,. \tag{4}$$

Consideriamo invece il caso in cui $P$ giace nella regione d'ombra dietro lo schermo. Costruiamo il cono $V$ connettendo il punto di osservazione $P$ a ciascun punto del bordo dell'apertura. Tale volume si estenderà ancora nella regione d'ombra. Applicando la stessa procedura vista nel caso precedente otteniamo un'interpretazione geometrica per la

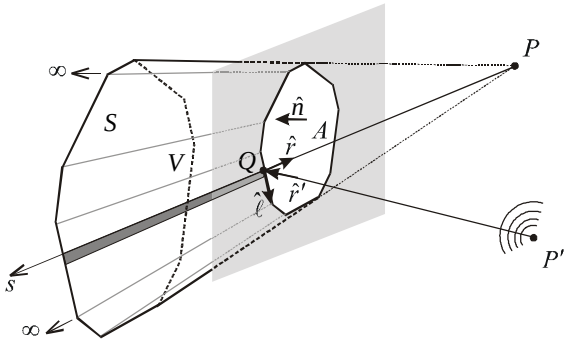


Fig. 2 Caso 1: tronco di cono $V$ costruito proiettando il punto di osservazione $P$ attraverso ciascun punto del bordo $\Gamma$ dell'apertura $A$. La superficie laterale $S$ è rimappata come sovrapposizione di strisce a divergenza sferica che partendo da un punto $Q$ del bordo divergono all'infinito.

formulazione delineata in [8] e [9] che è invece impostata in modo puramente matematico. Per evitare problemi di calcolo dovuti alla singolarità della funzione di Green in $P$, tagliamo la punta del cono con una sfera di raggio $e$, arbitrariamente piccolo. Il teorema di Helmholtz-Huygens applicato al volume $V$, libero da sorgenti, dà un'espressione analoga a (2) ma in cui il dominio di integrazione è esteso a $A+S+\Sigma$. Perciò il campo radiato dall'apertura $A$ può essere alternativamente calcolato come meno la somma dei campi radiati dalla superficie laterale $S$ e dalla calotta sferica $\Sigma$. Come nel caso precedente l'integrale su $S$ può essere rimappato come integrale sul contorno $\Gamma$ di un integrale interno lungo strisce a convergenza sferica, che si estendono dal bordo di $\Sigma$ al bordo di $A$. L'integrale superficiale su $\Sigma$ può essere calcolato come integrale sull'angolo solido sotteso $\Omega_A$. Nel limite $e \to 0$, $\Sigma$ collassa in $P$ e l'integrale può essere calcolato semplicemente come

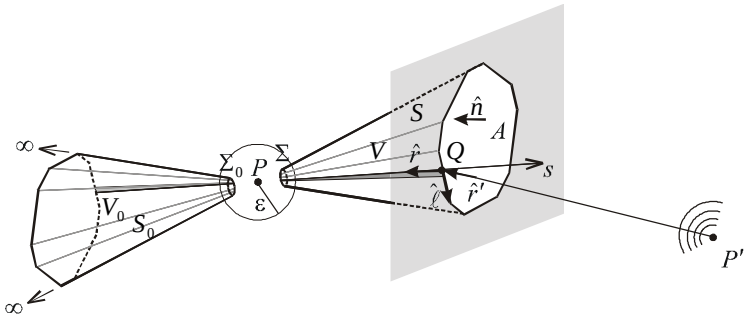


Fig. 3. Caso 2: cono a due falde, una finita $V$ e una infinita $V_0$, costruito proiettando il punto di osservazione $P$ attraverso ciascun punto del bordo $\Gamma$ dell'apertura $A$. Le punte del cono sono escluse da una sfera di raggio infinitesimo che ritaglia le superfici $\Sigma$ e $\Sigma_0$. Le superfici laterali $S$ e $S_0$ sono rimappate come sovrapposizione di strisce a divergenza sferica che partendo da un punto $Q$ del bordo, convergono nel punto di osservazione $P$ e poi divergono all'infinito.

$$\lim_{e\to 0}\iint_{\Omega_A}\left[U^i(Q)\tfrac{\partial}{\partial e}\tfrac{e^{-jke}}{4pe}-\tfrac{\partial}{\partial e}U^i(Q)\ \ \tfrac{e^{-jke}}{4pe}\right]\ e^2 d\Omega=\tfrac{\Omega_A}{4p}U^i(P). \tag{5}$$

In definitiva, in questo secondo caso otteniamo

$$U^A=\oint_\Gamma\left(-\tfrac{1}{4pr}\hat{r}\times\int_0^r\nabla U^i(P-\hat{r}s)e^{-jks}ds\right)\cdot\hat{\ell}\ \ d\ell+\tfrac{\Omega_A}{4p}U^i(P) \tag{6}$$

in cui il segno meno tiene conto del fatto che la normale (interna a $V$) alle strisce è $\hat{n}=-\hat{r}\times\hat{\ell}\big/\left|\hat{r}\times\hat{\ell}\right|$. L'angolo solido $\Omega_A$ può essere calcolato in modo alternativo a [8], usando ancora una costruzione geometrica. Prolungiamo il cono $V$ attraverso $P$ e consideriamo l'altra falda infinita che indichiamo con $V_0$. Come prima, la punta del cono è esclusa dalla sfera di raggio infinitesimo. Applicando il teorema di Helmholtz-Huygens al volume $V_0$ libero da sorgenti otteniamo dà un'espressione analoga a (2) ma in cui il dominio di integrazione è esteso alla superficie laterale e alla calotta sferica terminale $S_0+\Sigma_0$ di $V_0$. Di nuovo l'integrale su $S_0$ può essere espresso come integrale su $\Gamma$ di un'integrale interno lungo strisce semiinfinite a divergenza sferica che si estendono dal bordo di $\Sigma_0$ all'infinito, mentre l'integrale su $\Sigma_0$ è calcolabile, per simmetria, come in (5). Si otteniene

$$\tfrac{\Omega_A}{4p}U^i(P)=\oint_\Gamma\left(-\tfrac{1}{4pr}\hat{r}\times\int_{-\infty}^0\nabla U^i(P-\hat{r}s)\ \ e^{jks}ds\right)\cdot\hat{\ell}\ \ d\ell. \tag{7}$$

Usando la (7) in (6), giungiamo a

$$U^A=\oint_\Gamma\left(-\tfrac{1}{4pr}\hat{r}\times\int_{-\infty}^r\nabla U^i(P-\hat{r}s)\ \ e^{-jk|s|}ds\right)\cdot\hat{\ell}\ \ d\ell. \tag{8}$$

Nel caso di onda sferica incidente prodotta da una sorgente scalare isotropa in $P'$, l'integrale più interno può essere valutato in forma chiusa ottenendo

$$U^A=\oint_\Gamma\left(\frac{e^{-jkr}}{4pr}\frac{e^{-jkr'}}{4pr'}\frac{\hat{r}\times\hat{r}'}{1-\hat{r}\cdot\hat{r}'}-\frac{e^{-jkR}}{4pR}\frac{1}{2pr}\frac{\hat{r}\times\hat{R}}{1-\left(\hat{r}\cdot\hat{R}\right)^2}\right)\cdot\hat{\ell}\ \ d\ell. \tag{9}$$

in cui $P-P'=R\hat{R}=r\hat{r}+r'\hat{r}'$. Le due espressioni (4) e (9) relative ai due casi considerati possono essere assemblate insieme come

$$U^A=\oint_\Gamma\left(\frac{e^{-jkr}}{4pr}\frac{e^{-jkr'}}{4pr'}\frac{\hat{r}\times\hat{r}'}{1-\hat{r}\cdot\hat{r}'}-\frac{e^{-jkR}}{4pR}\frac{c\left(\hat{r}\cdot\hat{r}'\right)}{2pr}\frac{\hat{r}\times\hat{R}}{1-\left(\hat{r}\cdot\hat{R}\right)^2}\right)\cdot\hat{\ell}\ \ d\ell \tag{10}$$

in cui $c$ è la funzione gradino che vale uno o zero per argomento rispettivamente positivo o negativo. L'integranda di (10) è composta da due termini: il primo è lo stesso ottenuto in [2] e, una volta integrato lungo il bordo dell'apertura, ricostruisce il solo campo diffratto. Accanto ad esso compare il secondo termine che ne compensa il comportamento singolare per $\hat{r}\approx\hat{r}'$, cioè quando la sorgente $P'$, il punto di integrazione $Q$ ed il punto di osservazione $P$ risultano

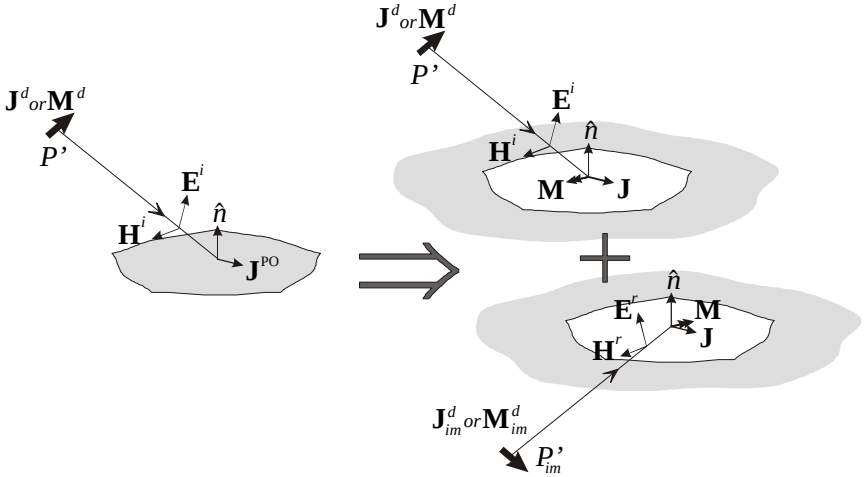


Fig. 4. Reirradaizione da una piastra piana perfettamente conduttrice ridotta al problema della radiazione di un'apertura in uno schermo perfettamente assorbente illuminato dalla sorgente reale e dalla sorgente immagine (rispetto la piano della piastra).

allineati; mandando a zero l'integranda complessiva che diventa così adatta ad una integrazione numerica efficiente. Il secondo termine prende il nome di contributo di Ottica Geometrica Incrementale (IGO), si tratta infatti di una porzione infinitesima di campo diretto (onda sferica) da associarsi a ciascun elemento infinitesimo di bordo. L'integrazione lungo il bordo del solo contributo di IGO riproduce il campo di GO complessivo.

Tralasciamo per brevità i dettagli dell'estensione al caso elettromagnetico. La formulazione procede in modo del tutto similare a quella scalare partendo dalla forma di Kottler [7] per l'integrale di radiazione di Kirchhoff elettromagnetico che permette di avere un'espressione formalmente analoga a quella scalare. Il risultato finale, valido per la rappresentazione in termini di integrale di linea del campo elettromagnetico radiato da un'apertura in uno schermo perfettamente assorbente illuminato da un dipolo elementare (elettrico o magnetico), può essere ottenuto da opportune differenziazioni spaziali della (10). Inoltre applicando il risultato ottenuto alla sorgente reale e alla sorgente immagine (nel senso definito dal teorema delle immagini per un piano conduttore perfetto infinito) è possibile estendere la soluzione alla radiazione elettromagnetica, in approssimazione di PO, da una piastra piana perfettamente conduttrice [5] (Fig. 4). Nel corso della presentazione verranno mostrati, a titolo esplicativo, alcuni risultati numerici di confronto tra il campo reirradiato da diverse strutture calcolati mediante il tradizionale integrale superficiale e la tecnica presentata. La coincidenza delle due predizioni verifica la validità teorica della presente trattazione per casi del tutto arbitrari e generali. Inoltre viene fatta una stima del guadagno computazionale che si ottiene dalla presente trattazione. Si verifica, come è ragionevole aspettarsi, che, mentre la formulazione tradizionale presenta una crescita quadratica dei tempi di calcolo rispetto alle dimensioni (lineari) delle piastre reirradianti, con la presente trattazione la crescita diventa di tipo lineare. Questo rende la presente tecnica particolarmente adatta alla descrizione di scatteratori elettricamente larghi.

## *Bibliografia*


[1] G. A. Maggi "Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo," *Annali di Matem. II$^a$*, vol. 16, pp. 21-48, 1888.

[2] A. Rubinowicz , "Die beugungswelle in der Kirchhoffschen theorie der beugungsercheinungen" *Ann. Physik*, vol. 53, pp. 257-278, 1917.

[3] K.Miyamoto and E. Wolf, "Generalization of the Maggi-Rubinowicz Theory of the Boundary Diffraction Wave – Part I & II," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 52, n. 6, pp. 615-625 & 626-637, June 1962.

[4] A. Rubinowicz "Geometric Derivation of the Miyamoto-Wolf Formula for the Vector Potential Associated with a Solution of the Helmholtz Equation," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 52, n. 6, pp. 717-718, June 1962.

[5] B. Karczewski, "Boundary Wave in Electromagnetic Theory of Diffraction," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 53, n. 7, pp. 878-879, July 1963.

[6] A. Rubinowicz, "The Miyamoto-Wolf Diffraction Wave," *Progress in Optics*, vol. 4, pp. 331-377, 1965.

[7] F. Kottler "Diffraction at a Black Screen. Part II: Electromagnetic Theory," *Progress in Optics*, vol. 6, pp. 331-377, 1967.

[8] J. S. Asvestas "Line integrals and physical optics. Part I. The transformation of the solid-angle surface integral to a line integral, & Part II. The conversion of the Kirchhoff surface integral to a line integral," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 2, n. 6, pp. 891-895 & 896-902, June 1985.

[9] J. S. Asvestas, "The Physical Optics Fields of an Aperture on a Perfectly Conducting Screen in Terms of Line Integrals," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 34, n. 9, pp. 1155-1159, Sep. 1986.

[10] P. M. Johansen and Olav Breinbjerg, "An Exact Line Integral Representation of the Physical Optics Scattered Field: The Case of a Perfectly Conducting Polyhedral Structure Illuminated by Electric Hertzian Dipoles," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 43, n. 7, pp. 689-696, July 1995.

[11] F. Mioc, M. Albani, P. Focardi and S. Maci,, "Line-Integral Representation of the Field Radiated by a Rectangular Waveguide Modal Current Distribution", *IEEE Trans. Antennas Propagat*, Vol. 47, n.2, pp. 408-410, Feb. 1999.

[12] G. Pelosi, G. Toso and E. Martini, "PO near-field expression of a penetrable planar structure in terms of a line integral," *IEEE Trans. Antennas Propagat*, Vol. 48 n. 8 , pp. 1274 –1276, Aug. 2000.