

ELETTRODINAMICA SUI FRATTALI: RAPPRESENTAZIONE DI CURVE FRATTALI ED EQUAZIONI INTEGRALI SU DOMINI FRATTALI

M. Giona¹, A. Adrover¹, W. Arrighetti², P. Baccarelli²,
P. Burghignoli², P. De Cupis², A. Galli² e G. Gerosa²

(¹) Università "La Sapienza" di Roma, Dipartimento di Ingegneria Chimica
Via Eudossiana 18, 00184 Roma. max@giona3.ing.uniroma1.it

(²) Università "La Sapienza" di Roma, Dipartimento di Ingegneria Elettronica
Via Eudossiana 18, 00184 Roma. gerosa@die.ing.uniroma1.it

Abstract

This work presents a rigorous setting of integral equations on fractal wire antennas. The proposed approach is based on the extension of Iterated Function System theory to obtain a parametric representation of fractal curves with respect to a normalised curvilinear abscissa, and to define the tangential properties on almost everywhere nondifferentiable curves. Applications to direct and inverse problems of electrostatics and electrodynamics are reported.

INTRODUZIONE

Le antenne frattali costituiscono una famiglia di componenti con significative possibilità di applicazione in elettromagnetismo. La facilità di fabbricazione di strutture costituite da poche iterazioni del processo ricorsivo che genera un dato frattale (è il caso, ad esempio, delle antenne stampate) ha consentito negli anni più recenti la produzione e l'analisi di differenti prototipi di antenne frattali (si veda, ad esempio, [1] e i riferimenti bibliografici ivi riportati).

Le ricerche di tipo sperimentale e numerico condotte sinora mancano generalmente di solide basi teoriche, che dovrebbero comprendere un quadro concettuale coerente per la definizione e l'analisi di campi vettoriali in domini frattali. Di conseguenza, alcune questioni fondamentali relative alla teoria elettromagnetica dei radiatori frattali rimangono tuttora irrisolte; ad esempio, è di rilevante interesse investigare se tali radiatori siano soggetti alle stesse limitazioni fondamentali (sul fattore di qualità, la direttività e il guadagno) cui sono soggetti i radiatori basati su geometrie euclidee. I risultati presenti in letteratura non consentono di risolvere simili questioni teoriche, essendo limitati allo studio di geometrie ottenute mediante un piccolo numero di iterazioni del processo di costruzione ricorsiva del frattale (cioè dei cosiddetti *prefrattali*). L'obiettivo di questa ricerca è di affrontare un'indagine sistematica di problemi elettromagnetici diretti e inversi relativi a strutture frattali.

SISTEMI DI FUNZIONI ITERATE

In questo lavoro si farà riferimento in particolare a strutture topologicamente equivalenti a curve monodimensionali (*fili frattali*). Due aspetti principali verranno analizzati: a) la teoria della rappresentazione parametrica di strutture frattali mediante sistemi aumentati di funzioni iterate; b) la definizione di campi vettoriali in domini frattali e la soluzione di problemi inversi espressi mediante equazioni integrali scalari e vettoriali su domini frattali.

La rappresentazione di oggetti frattali mediante sistemi di funzioni iterate (*Iterated Function Systems*, IFS) è uno degli strumenti più potenti nella teoria dei frattali, come già rilevato nella letteratura esistente sui radiatori frattali. Un IFS con probabilità è un sistema $\{w_h(\mathbf{x}), p_h\}_{h=1}^N$ di N trasformazioni contrattive $w_h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ (\mathbb{R}^d è lo spazio euclideo d -dimensionale) con pesi di probabilità associati $p_h > 0$, $\sum_{h=1}^N p_h = 1$ [2].

Nell'ambito della teoria delle antenne frattali, gli IFS sono stati applicati essenzialmente alla costruzione di curve frattali (come modelli di antenne filiformi di tipo frattale), e alla definizione delle loro

proprietà geometriche frattali [3,4]. Una struttura frattale può essere considerata come il punto fisso di un operatore $W : H(\mathbb{R}^d) \rightarrow H(\mathbb{R}^d)$ definito da:

$$W(B) = \bigcup_{h=1}^N w_h(B), \quad B \in H(\mathbb{R}^d) \quad (1)$$

dove $H(\mathbb{R}^d)$ è lo spazio di tutti i sottoinsiemi compatti di \mathbb{R}^d ; $H(\mathbb{R}^d)$ è uno spazio metrico completo rispetto alla metrica di Hausdorff d_H [2].

Grazie alla natura contrattiva delle trasformazioni che definiscono l'IFS, l'operatore W risulta contrattivo in $(H(\mathbb{R}^d), d_H)$ e pertanto il suo unico punto fisso $C = \bigcup_{h=1}^N w_h(C)$ definisce (condizione di Hutchinson) l'insieme frattale generato dall'IFS indipendentemente dal valore dei pesi di probabilità p_h . La teoria degli IFS consente di ottenere una semplice rappresentazione geometrica dell'insieme frattale C , poiché esso può essere ottenuto come l'insieme limite del *Random Iteration Algorithm* [2] costruito a partire da $\{w_h(\mathbf{x}), p_h\}_{h=1}^N$ secondo la $\mathbf{x}_{n+1} = w_h(\mathbf{x}_n)$, dove \mathbf{x}_{n+1} è l'immagine di \mathbf{x}_n per mezzo di una delle N trasformazioni w_h scelte aleatoriamente con probabilità p_h .

Tra i possibili IFS, gli IFS auto-simili risultano particolarmente utili nelle applicazioni. Per $d = 2$, un IFS auto-simile ha la forma $w_h(\mathbf{x}) = A_h \mathbf{x} + \mathbf{b}_h$ ($h = 1, \dots, N$), dove A_h sono matrici auto-simili ottenute componendo similitudini $A = s_h \mathbf{I}$ ($0 < s_h < 1$, \mathbf{I} matrice identità), rotazioni di angolo θ_h e riflessioni rispetto a uno dei due assi, mentre \mathbf{b}_h sono vettori di traslazione. Un esempio di curva frattale generata in questo modo è mostrato in Fig. 1: essa è ottenuta mediante un IFS con $N = 8$, ciascuna delle 8 trasformazioni essendo caratterizzata dallo stesso fattore di scala $s = 1/4$, per cui la dimensione frattale (di Hausdorff) risulta $d_F = \log 8 / \log 4 = 3/2$.

IFS AUMENTATI E ANALISI DI ANTENNE LINEARI FRATTALI

La teoria degli IFS precedentemente richiamata non è sufficiente alla definizione rigorosa di equazioni integrali per l'analisi di antenne filiformi frattali. Si consideri infatti la classica formulazione approssimata per antenne filiformi sottili. Sia data la curva γ , che rappresenta l'antenna (corrispondente a una struttura cilindrica di raggio a e asse γ), con ascissa curvilinea $s \in [0, 1]$. Le due equazioni di base, che definiscono i problemi elettromagnetici diretto e inverso, sono: a) l'espressione del potenziale vettore in funzione della corrente $I(s)$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mu \int_0^1 I(s') \mathbf{t}(s') g(\mathbf{x}, \mathbf{x}(s')) ds' \quad (2)$$

dove $\mathbf{t}(s)$ è il versore tangente a γ e $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}(s'))$ è la funzione di Green dello spazio libero; b) l'equazione di Pocklington nell'incognita $I(s)$ essendo assegnato il campo elettrico tangenziale $\mathbf{E}_t^i(s)$:

$$\int_0^1 I(s') \left[\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s'} - k^2 \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s') \right] g(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s')) ds' = i\omega \epsilon \mathbf{E}_t^i(\mathbf{x}(s)) \quad (3)$$

dove $\partial/\partial s = \mathbf{t}(s) \cdot \nabla$.

Al fine di riformulare in modo rigoroso queste due equazioni per strutture frattali sono necessari due elementi: a) la parametrizzazione di una curva frattale rispetto a un'ascissa; b) la definizione di integrali curvilinei di forme differenziali lineari, quali $\int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy$, su curve frattali. Entrambi questi aspetti possono essere affrontati per mezzo del concetto di IFS aumentati. L'approccio proposto è una versione più semplice e rigorosa di quello sviluppato in [5].

Dato un IFS planare auto-similare che genera la curva frattale $C \subseteq \mathbb{R}^2$, si può associare ad esso l'IFS *Aumentato* (AIFS) per mezzo delle trasformazioni $\tilde{w}_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($h=1, \dots, N$):

$$\tilde{w}_h(z) = \begin{pmatrix} \sigma_h & 0 \\ 0 & A_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_h \\ \mathbf{b}_h \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \sigma_h = \frac{s_h}{\sum_{k=1}^N s_k}, \quad \omega_h = \frac{\sum_{k=1}^{h-1} s_k}{\sum_{k=1}^N s_k} \quad (4)$$

dove $z = (s, \mathbf{x})^T$. L'AIFS è definito in \mathbb{R}^3 , e il suo insieme limite C_a possiede le seguenti proprietà: la coordinata aggiuntiva $s \in [0,1]$ rappresenta una parametrizzazione naturale della curva frattale; per ogni valore di $s \in [0,1]$ esiste un unico $\mathbf{x}(s) \in C$, per cui è possibile definire una funzione vettoriale $\mathbf{x} = \mathbf{T}(s) = (T_1(s), T_2(s))^T$ definita sull'intervallo $[0,1]$ a valori in C . Questa costruzione geometrica è riportata nelle Figg. 1-4: la Fig. 2 mostra l'insieme limite C_a , la Fig. 1 mostra la proiezione di C_a sul piano \mathbf{x} , corrispondente alla curva frattale C , mentre i grafici delle due funzioni $T_1(s)$ and $T_2(s)$ sono le proiezioni di C_a sui piani s - x_1 , s - x_2 , rispettivamente (Figg. 3 e 4).

Per mezzo dell'AIFS è possibile non solo ottenere una rappresentazione parametrica della curva frattale C ma anche introdurre il concetto di integrale di linea di un campo vettoriale continuo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ su C . L'integrale di linea di $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))^T$ su C è definito come l'integrale di Stieltjes di \mathbf{f} rispetto a $(T_1(s), T_2(s))$, cioè:

$$\int_C \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 [f_1(\mathbf{x}(s))dT_1(s) + f_2(\mathbf{x}(s))dT_2(s)] \quad (5)$$

La quantità al secondo membro della (5) esiste e vale

$$\int_C \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M [f_1(\mathbf{x}_k)(x_{1,k+1} - x_{1,k}) + f_2(\mathbf{x}_k)(x_{2,k+1} - x_{2,k})] \quad (6)$$

dove $\{(\mathbf{x}_k, s_k)\}_{k=1}^M$ è un insieme di punti, ordinati secondo valori non decrescenti di s_k , ottenuto tramite il Random Iteration Algorithm associato all'AIFS con pesi di probabilità pari a σ_h .

Analogamente, il potenziale vettore associato a una assegnata distribuzione tangenziale di corrente su un'antenna lineare frattale può essere espresso come:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mu \left[\int_0^1 I(s') g(\mathbf{x}, \mathbf{x}(s')) dT_1(s') \mathbf{e}_1 + \int_0^1 I(s') g(\mathbf{x}, \mathbf{x}(s')) dT_2(s') \mathbf{e}_2 \right] \quad (7)$$

dove \mathbf{e}_i , $i = 1, 2$ sono i versori degli assi del piano che contiene C .

CONCLUSIONI

La generalizzazione dei sistemi di funzione iterate (IFS) che generano curve frattali mediante il concetto di IFS aumentati consente di ottenere una rappresentazione parametrica di curve frattali utile alla definizione rigorosa di equazioni integrali per antenne lineari frattali. La soluzione di problemi inversi per tali antenne si può allora basare sulla (3), espandendo la corrente $I(s)$ per mezzo di un opportuno insieme di funzioni base.

RINGRAZIAMENTI

Il presente lavoro è stato realizzato con il supporto finanziario della Commissione Europea, progetto FET IST-2001-33055.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. H. Werner e R. Mittra, Eds., *Frontiers in electromagnetics*. Piscataway, NJ: IEEE Press, Capp. 1-3, 2000.
- [2] C. Puente-Baliarda, J. Romeu, R. Pous e A. Cardama, "On the behavior of the Sierpinski multiband fractal antenna", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 46, pp. 517-524, aprile 1998.
- [3] C. Puente-Baliarda, J. Romeu e A. Cardama, "The Koch monopole: a small fractal antenna", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 48, pp. 1773-1781, novembre 2000.
- [4] M. Barnsley, Eds., *Fractals everywhere*. San Diego, CA: Academic Press, 1988.
- [5] M. Giona, "Contour integrals and vector calculus on fractal curves and interfaces", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 10, n. 8, pp. 1349-1370, 1999.

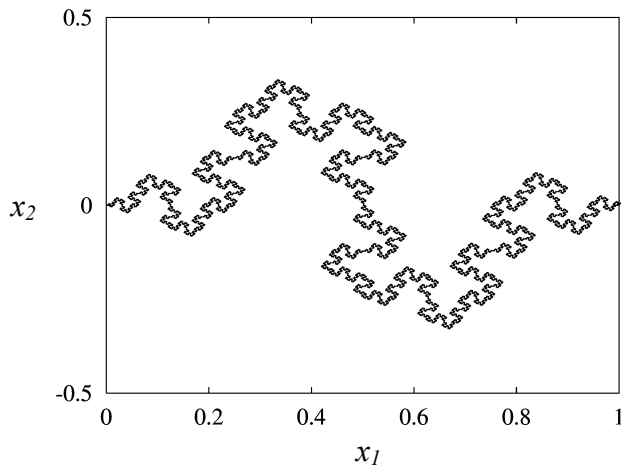


Fig. 1 – Attrattore C dell' IFS sul piano x_1 - x_2 .

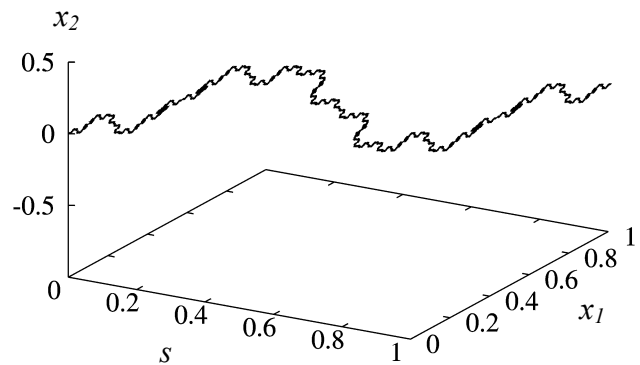


Fig. 2 – Attrattore C_a dell'AIFS, la cui proiezione sul piano x è l'attrattore C dell'IFS (vedi Fig. 1).

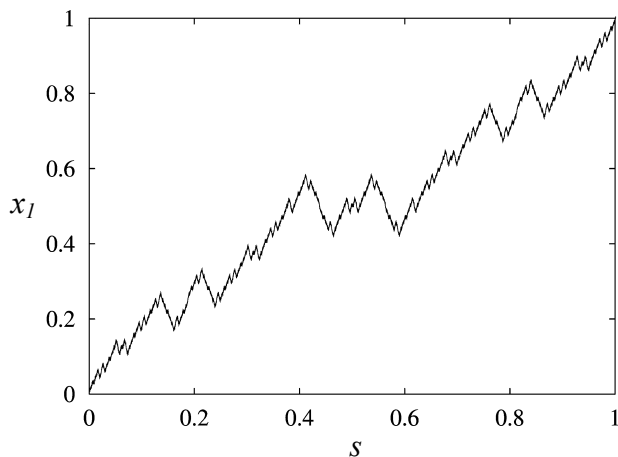


Fig. 3 – Grafico di $T_1(s)$, proiezione di C_a sul piano s - x_1 .

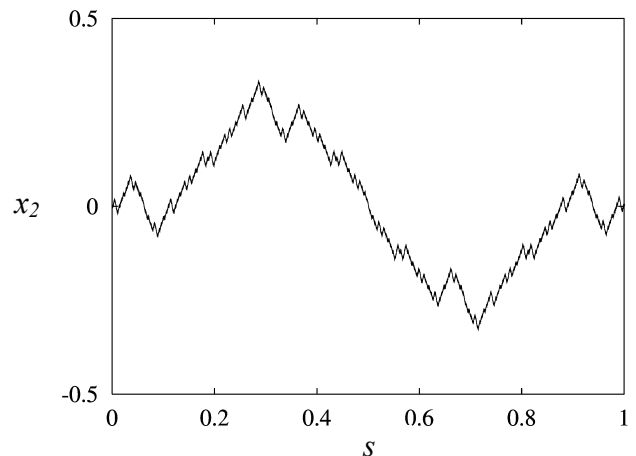


Fig. 4 – Grafico di $T_2(s)$, proiezione di C_a sul piano s - x_2 .