

## ANALISI VARIAZIONALE DI FIBRE OTTICHE

F. Chiadini, A. Scaglione

Dipartimento di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica, Universita' di Salerno, via Ponte don Melillo – 84084 Fisciano (Sa)

[fchiadini@unisa.it](mailto:fchiadini@unisa.it), [antscag@diie.unisa.it](mailto:antscag@diie.unisa.it)

G. Panariello

Dipartimento di Automazione, Elettromagnetismo, Ing. dell'Informazione e Matematica Industriale, Universita' di Cassino, 03043 Cassino (Fr), Italy.

[panariel@unicas.it](mailto:panariel@unicas.it)

### Abstract

*A variational analysis of weakly guiding optical fibers is described. A series expansion of Laguerre-Gauss functions and a modified Bessel function have been used to describe the field in the fiber core and in the uniform cladding respectively. Low-order LP modes have been analyzed for both a parabolic refractive index profile and a modified profile exhibiting a ring of elevated index around the core. Results show that proposed analysis appears to be appropriate to accurately determine both propagation constant and field distribution of modes of an optical fiber.*

### INTRODUZIONE

La determinazione del campo e della costante di propagazione dei modi guidati e' il requisito essenziale per una corretta valutazione delle caratteristiche trasmissive di una fibra ottica e quindi delle prestazioni di un sistema di trasmissione in fibra ottica. Nel caso di fibre debolmente guidanti, le approssimazioni Gaussiana<sup>[1,2]</sup> (nelle sue diverse versioni) o di altro tipo<sup>[3,4]</sup>, costituiscono uno strumento di analisi parziale in quanto sono generalmente rivolte allo studio del solo modo fondamentale e, in numerose applicazioni (determinazione della lunghezza d'onda di taglio della fibra cablata, valutazione delle perdite per curvatura, analisi dell'accoppiamento per campo evanescente, ecc.), non forniscono risultati attendibili. In tali casi occorre quindi determinare il campo risolvendo l'equazione scalare delle onde. E' ben noto che soluzioni analitiche esatte possono ottenersi solo per una fibra step-index e che soluzioni analitiche approssimate sono disponibili solo per particolari classi di profili d'indice di rifrazione (profili alfa); per profili piu' complessi (ad esempio quelli che consentono di operare in terza finestra con dispersione minima e/o di aumentare l'area efficace della fibra) in genere occorre far ricorso a soluzioni di tipo numerico, alcune delle quali basate su sviluppi in serie di funzioni<sup>[1,5]</sup>. In questo lavoro si descrive una procedura variazionale per l'analisi di fibre ottiche con profilo arbitrario che consente la determinazione del campo e della costante di propagazione sia del modo fondamentale sia di modi di ordine superiore.

## ANALISI VARIAZIONALE

Sia  $F_{n,l}(R)$  la distribuzione radiale del campo del generico modo  $LP_{n,l}$  di una fibra ottica con profilo di indice di rifrazione arbitrario ( $R$  e' la coordinata radiale normalizzata al raggio del nucleo della fibra); si ponga:

$$F_{n,l}(R) = \begin{cases} (R/R_0)^n e^{-R^2/2R_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^{(n)}(R^2/R_0^2) & R \leq R_c \\ [R_0^n K_n(WR_c)]^{-1} e^{-R_c^2/2R_0^2} K_n(WR) \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^{(n)}(R_c^2/R_0^2) & R \geq R_c \end{cases} \quad (1)$$

in cui  $L_n^{(n)}(R^2/R_0^2)$  e' il polinomio generalizzato di Laguerre di ordine  $n$  e grado  $n$ ,  $R_0$  e' la funzione modificata di Bessel di secondo tipo e di ordine  $n$ , e  $W$  e' la costante di attenuazione normalizzata nel cladding  $W = (V^2 - U^2)^{1/2}$  con  $V$  ed  $U$  rispettivamente, frequenza e costante di propagazione trasversa normalizzate. Imponendo la continuita' della derivata del campo in si ottiene una relazione che lega uno dei coefficienti dell'espansione (ad esempio  $c_0$ ) agli altri

$$c_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n \quad (2)$$

in cui  $a_n$  sono costanti dipendenti da  $W$ ,  $R_0$  ed  $R_c$ . I parametri che definiscono il campo (i coefficienti dell'espansione  $c_n$ , la varianza della Gaussiana  $R_0$  e la costante  $W$ ) vengono calcolati risolvendo, con una procedura numerica iterativa, il sistema di equazioni

$$\frac{\partial U^2}{\partial c_n} = 0 \quad n = 0, 2, \dots \quad (3a), \quad \frac{\partial U^2}{\partial R_0} = 0 \quad (3b)$$

ottenute a partire dalla sostituzione della (1) nella ben nota espressione stazionaria di  $U$

$$U^2 = \frac{\int_0^{\infty} [V^2 f + (n/R)^2] F_{n,l}^2(R) R dR + \int_0^{\infty} [dF_{n,l}(R)/dR]^2 R dR}{\int_0^{\infty} F_{n,l}^2(R) R dR} \quad (4)$$

( $f$  e' una funzione di  $R$  che definisce l'andamento del profilo d'indice di rifrazione). Ovviamente ai fini di una valutazione numerica, l'espansione nella (1) deve avere un numero finito  $N$  di termini; fissato tale numero, tenendo conto della (2), le (3a) danno luogo ad un sistema di  $(N-1)$  equazioni lineari che definisce un problema agli autovalori generalizzato che puo' scriversi:

$$\underline{\underline{A}}(W, R_0, R_c) \underline{\underline{C}} - U^2 \underline{\underline{B}}(W, R_0, R_c) \underline{\underline{C}} = 0 \quad (5)$$

in cui  $\underline{C}$  e' il vettore dei coefficienti  $c_n$  ed  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$  sono matrici  $(N-1) \times (N-1)$  i cui elementi dipendono da  $W$ ,  $R_0$  ed  $R_c$ . Noto  $R_c$ , assegnati valori iniziali approssimati per  $W$  e  $R_0$ , le matrici  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$  possono facilmente calcolarsi ed il sistema (5) e' risolvibile numericamente; l'autovalore di ordine  $l$  (in ordine crescente) e' il parametro  $U$  del modo considerato mentre il rispettivo autovettore fornisce i coefficienti dell'espansione. Il valore calcolato di  $U$  puo' utilizzarsi come parametro di ingresso di una procedura numerica che, ricalcolando le matrici  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$ , risolve nuovamente il sistema fornendo cosi' un autovalore via via piu' preciso. Ottimizzato  $U$  si passa a risolvere la (3b) per ottenere il valore di  $R_0$  che minimizza l'autovalore. I due passi di ottimizzazione (su  $U$  e su  $R_0$ ) possono essere ripetuti iterativamente ottenendo cosi' rappresentazioni del campo molto precise. La procedura converge rapidamente e puo' essere implementata su PC di modesta capacita' di calcolo.

## RISULTATI

Nelle tabelle I e II e' riportata la costante di propagazione normalizzata  $b = W/V$  di alcuni dei modi di ordine piu' basso di una fibra con profilo parabolico-troncato ( $R_c = 1$ ). I nostri risultati sono confrontati con quelli ottenuti dalla soluzione in serie di potenze (100 termini) e da una soluzione in serie di funzioni di Laguerre-Gauss <sup>[5]</sup>. In tabella III e' invece riportato l'autovalore  $U$  di alcuni dei modi di ordine piu' basso di una fibra con profilo d'indice di rifrazione che presenta una regione anulare di indice piu' elevato intorno al nucleo cosi' come mostrato in figura 1 ( $R_c = 2.5$ ). Profili con tale andamento si ritrovano tipicamente nelle fibre a dispersione spostata o in quelle ad area efficace maggiorata. In tabella, i nostri risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti risolvendo il problema con il metodo delle differenze finite.

V	Power series Solution (N=100)	ref. [15] N=16	Our solution N=3	Our solution N=4
<b>LP<sub>01</sub></b>				
1.25	0.11255	-	0.11255	0.11255
1.50	0.21209	0.20096	0.21209	0.21209
2.00	0.38899	0.38878	0.38899	0.38899
3	0.60260	0.60259	0.60260	0.60260
7	0.84525	0.84525	0.84525	0.84525
15	0.93095	0.93095	0.93095	0.93095
30	0.96609	0.96609	0.96609	0.96609
<b>LP<sub>02</sub></b>				
5.50	0.09485	0.07999	0.04980	0.09484
5.75	0.16707	0.16533	0.12992	0.16705
6.00	0.22811	0.22783	0.19824	0.22810
6.25	0.28013	0.28008	0.25571	0.28012
7	0.39912	0.39912	0.38455	0.39911
10	0.63306	0.63306	0.62942	0.63306
20	0.83666	0.83666	0.83566	0.83666

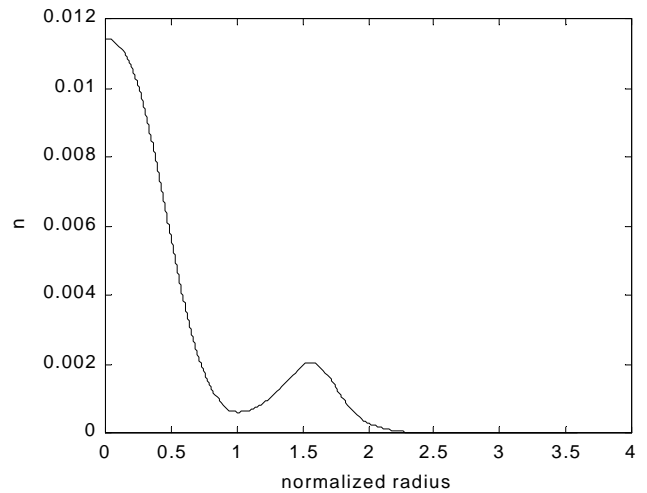
**tabella I**

V	Power series solution (N=100)	ref. [15] N=16	Our solution N=3	Our solution N=4
<b>LP<sub>11</sub></b>				
3.75	0.16336	0.16116	0.16335	0.16335
4.00	0.25413	0.25391	0.25412	0.25412
4.25	0.32318	0.32314	0.32317	0.32317
4.50	0.37920	0.37919	0.37920	0.37920
4.75	0.42610	0.42610	0.42610	0.42610
10	0.77464	0.77464	0.77464	0.77464
20	0.89443	0.89443	0.89443	0.89443
<b>LP<sub>12</sub></b>				
7.50	0.04012	-	-	0.04005
7.75	0.12936	0.12742	0.05458	0.12933
8.00	0.19078	0.19075	0.14376	0.19075
8.50	0.28262	0.28260	0.25506	0.28260
9	0.35173	0.35173	0.33315	0.35171
10	0.45251	0.45251	0.44240	0.45250
20	0.77460	0.77459	0.77430	0.77460

**tabella II**

V	Finite Differences	Our solution			
		N=3	N=5	N=7	N=16
LP <sub>01</sub>					
0,75	0,7496	0,7499	0,7499	0,7499	0,7499
1	0,9986	0,9989	0,9988	0,9988	0,9988
2	1,9044	1,9098	1,9048	1,9047	1,9047
3	2,6347	2,6542	2,6350	2,6347	2,6347
5	3,6623	3,6800	3,6629	3,6623	3,6623
LP <sub>11</sub>					
3,5	3,4879	3,4931	3,4899	3,4898	3,4898
4	3,9479	3,9594	3,9491	3,9490	3,9489
5	4,8101	4,8583	4,8136	4,8115	4,8114
LP <sub>02</sub>					
4,5	4,4386	4,4823	4,4470	4,4398	4,4397
5	4,8960	4,9402	4,9073	4,8967	4,8966
6	5,8055	5,8452	5,8260	5,8059	5,8057

**tabella III**



**figura 1**

## CONCLUSIONI

Per quanto riguarda il profilo parabolico, la soluzione proposta fornisce in pratica gli stessi risultati degli altri due metodi considerati ricorrendo però ad espansioni con numero di termini (3 o 4) notevolmente minore. Per quanto riguarda invece il profilo di figura 1, i nostri risultati in genere coincidono con quelli ottenuti con le differenze finite tranne alle frequenze più basse, dove è noto che la convergenza di tale metodo è estremamente lenta. La procedura proposta è quindi particolarmente utile per l'analisi di fibre con profilo arbitrario ed appare una valida alternativa ad analisi basate su metodi numerici convenzionali.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] A.W.Snyder and J.D.Love, "Optical Waveguide Theory", New York, Chapman & Hall, 1983
- [2] S.C.Chao, W.H.Tsai and M.S.Wu, "Extended Gaussian approximation for single-mode fibers" J. Lightwave Technol., vol 12, pp. 392-395, 1994.
- [3] G.DeAngelis, G.Panariello and A.Scaglione, "A variational method to approximate the field of weakly-guiding optical fibers by Laguerre-Gauss/Bessel expansion", J. Lightwave Technol., vol 17, pp. 2665-2674, 1999.
- [4] Q.Chao and S.Chi, "Approximate analytical description for fundamental-mode fields of graded-index fibers: beyond the Gaussian approximation" J. Lightwave Technol., vol 18, pp. 54-59, 2001.
- [5] J.P.Meunier, J.Pingeon and J.N.Massot, "A general approach to the numerical determination of modal propagation constants and field distributions of optical fibres," Opt. and Quantum Electron., vol. 13, pp. 71-83, 1981.