

RISOLUZIONE NELLE RICOSTRUZIONI LINEARI TOMOGRAFICHE

Giovanni Leone, Raffaele Solimene

Dipartimento di Informatica, Matematica, Elettronica e Trasporti,
Università Mediterranea di Reggio Calabria
Via Graziella, I-89100, Reggio Calabria, Italia
Tel.: +39 0965 875262; Fax: +39 0965 875247; e-mail: gioleone@ing.unirc.it

Abstract

The problem of investigating resolution limits while reconstructing a dielectric object from the knowledge of its scattered field over a rectilinear and bounded domain is dealt with. For a multifrequency illumination, we examine both the cases of singleview-multistatic and multimonostatic configuration. The analysis is performed by casting the problem as the inversion of the linear operator arising from the Born approximation by means of the Singular Value Decomposition. The achievable resolution is estimated by resorting the Rayleigh's criterion and the role of the sensing geometry and the adopted frequencies is highlighted.

INTRODUZIONE

Nell'ambito dei problemi di diffusione elettromagnetica inversa, la risoluzione ottenibile è uno dei parametri fondamentali in quanto tiene in conto del più piccolo dettaglio dell'incognita che è possibile ricostruire. Sfortunatamente, determinarla non è un compito facile a causa della non linearità del legame matematico tra l'incognita (il profilo di permittività dielettrica) e i dati (il campo diffuso).

Tuttavia, se l'oggetto incognito può essere considerato un "debole diffusore", l'approssimazione di Born consente di linearizzare il problema, ma anche in questo contesto la mal-posizione del problema inverso e l'inevitabile presenza di incertezze sui dati non consentono di ricostruire dettagli arbitrariamente piccoli dell'incognita.

In questo lavoro, affrontiamo il problema della determinazione dei limiti in risoluzione ottenibili nella ricostruzione di oggetti (cilindrici) dielettrici immersi in un mezzo omogeneo per la geometria scalare e bidimensionale riportata in Fig. 1. Il problema viene formulato come l'inversione dell'operatore lineare di diffusione derivante dall'approssimazione di Born e lo studio viene condotto attraverso la sua Decomposizione ai Valori Singolari (SVD). Infine, la risoluzione viene stimata applicando il criterio di Rayleigh alla ricostruzione di oggetti impulsivi.

Tale studio è già stato condotto per il caso di oggetti monodimensionali posti in zona di Fresnel rispetto al dominio di osservazione, per la configurazione singola-vista/multistatica/multifrequenza per cui la SVD dell'operatore coinvolto è stata determinata analiticamente [1]. Nel seguito, seguendo la stessa linea di ragionamento, da un lato estendiamo l'analisi al caso più generale di dominio di investigazione rettangolare considerando anche una configurazione multimonostatica/multifrequenza, dall'altro, sono analizzate anche situazioni per cui l'approssimazione di Fresnel non è più valida.

FORMULAZIONE MATEMATICA

Consideriamo la geometria riportata in Fig. 1. Per configurazione singola-vista/multistatica/multifrequenza ci riferiamo alla configurazione per cui il campo illuminante

è fornito da onde piana incidenti lungo l'asse z , polarizzate linearmente lungo l'asse y ed aventi pulsazione spaziale variabile nell'intervallo $[\beta_{\min}, \beta_{\max}]$, ove β è la costante di propagazione del mezzo omogeneo in cui evolve il fenomeno, mentre il campo diffuso $E_s(\cdot)$ è assunto noto su tutto il dominio di osservazione $[-x_0, x_0]$. Per configurazione multimonostatica/

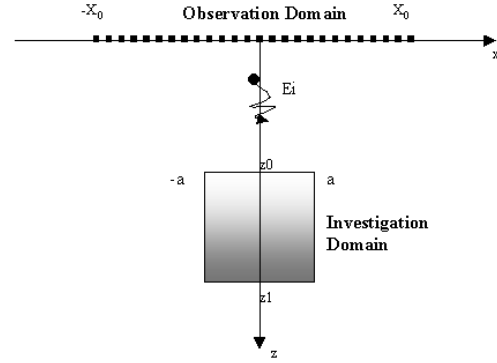


Fig. 1 Geometria del problema

multifrequenza ci riferiamo alla situazione in cui il campo illuminante è fornito da un filo di corrente, diretto lungo l'asse y , che occupa diverse posizioni in $[-x_0, x_0]$ ed irradia nello stesso intervallo di pulsazioni di cui sopra, mentre il campo diffuso è assunto noto solo nella stessa posizione occupata dal filo di corrente, per ogni posizione di quest'ultimo.

Nell'ambito dell'approssimazione lineare, per entrambe le configurazioni considerate il problema può essere formulato come l'inversione dell'operatore lineare di diffusione relativo

$$A: \chi \in X \rightarrow E_s \in Y \quad (1)$$

ove A dipende dalla configurazione considerata, $\chi(\cdot) = \varepsilon(\cdot)/\varepsilon_b - 1$, $\varepsilon(\cdot)$ e $\varepsilon_b(\cdot)$ sono la funzione contrasto (l'incognita del problema), il profilo di permittività dielettrica dell'oggetto incognito ed il profilo di permittività del mezzo in cui l'oggetto è immerso, rispettivamente.

Inoltre, $X = L^2(\Omega = [-a, a] \times [z_0, z_1])$ e $Y = L^2(\Sigma = [-x_0, x_0] \times [\beta_{\min}, \beta_{\max}])$ sono gli spazi di Hilbert delle funzioni a quadrato sommabili in cui cerchiamo l'incognita e assumiamo i dati appartengano, rispettivamente. Poiché il nucleo dell'operatore (1) è rappresentato da una funzione continua in $\Sigma \times D$, allora (1) è un operatore compatto e può essere analizzato attraverso il suo sistema singolare $\{\sigma_n, u_n, v_n\}_{n=1}^{\infty}$. Inoltre, poiché i valori singolari tendono a zero quando $n \rightarrow \infty$ la soluzione non dipende in maniera continua dai dati. Quindi, allo scopo di ottenere ricostruzioni stabili il problema può essere regolarizzato troncando l'espansione SVD

$$\chi \cong \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n} \langle E_s, v_n \rangle_Y u_n \quad (2)$$

ove $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ denota il prodotto scalare nello spazio lineare Y .

Il punto cruciale di tale approccio consiste nella scelta dell'indice di troncamento N . Questo dipende dall'andamento dei valori singolari e dal livello di incertezza sui dati e stabilisce un compromesso tra stabilità e accuratezza: più è grande N , migliore è la risoluzione, maggiore è l'effetto delle incertezze sulle ricostruzioni.

Fissato N , la risoluzione può essere stimata applicando il criterio di Rayleigh alla ricostruzione regolarizzata di un oggetto spazialmente impulsivo.

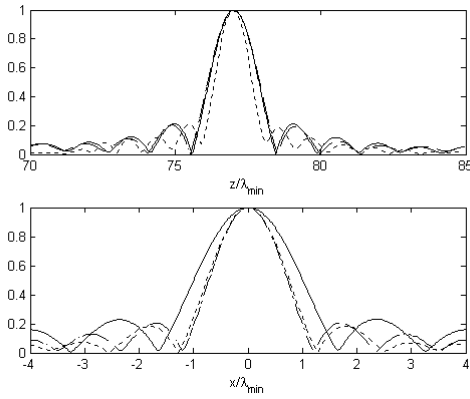


Fig. 2 Ricostruzioni multistatiche

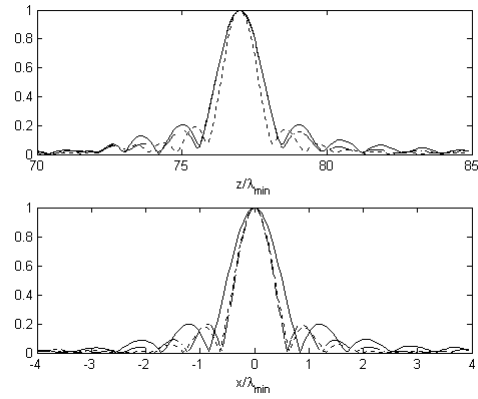


Fig. 3 Ricostruzioni multimonostatiche

RISULTATI NUMERICI

Le Fig. 2 e 3 si riferiscono al caso di dominio di investigazione posto in zona di Fresnel avente $a = 4\lambda_{\min}$, $z_0 = 70\lambda_{\min}$ e $z_1 = 85\lambda_{\min}$, con $\lambda_{\min} = 2\pi/\beta_{\max}$, per una configurazione multistatica e multimonostatica rispettivamente. In particolare esse mostrano i tagli (lungo z e $x = 0$ parte superiore; lungo x e $z = 77\lambda_{\min}$ parte inferiore) dell'ampiezza, normalizzata al massimo, della ricostruzione di un impulso posto in $(0\lambda_{\min}, 77\lambda_{\min})$ per diversi parametri della configurazione di misura ($x_0 = 25\lambda_{\min}$, $\beta \in [2\pi/1.5, 2\pi]$ linea continua; $x_0 = 35\lambda_{\min}$, $\beta \in [2\pi/1.5, 2\pi]$ linea a tratti; $x_0 = 35\lambda_{\min}$, $\beta \in [2\pi/1.8, 2\pi]$ linea a punti). La Fig. 4 mostra invece, per quest'ultima configurazione, nella parte superiore il taglio lungo z per $x = 0$ della ricostruzione di due impulsi posti in $(0,71\lambda_{\min})$ e $(0,81\lambda_{\min})$, nella parte inferiore il taglio lungo x per

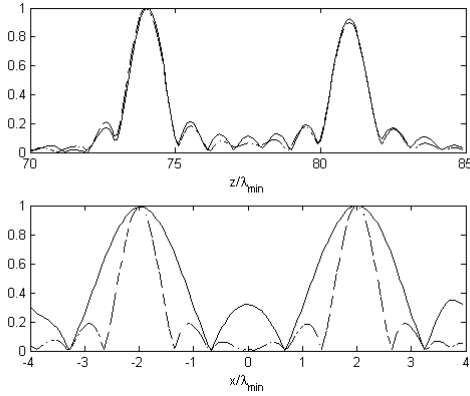


Fig. 4 Sulla risoluzione in profondità e trasversa

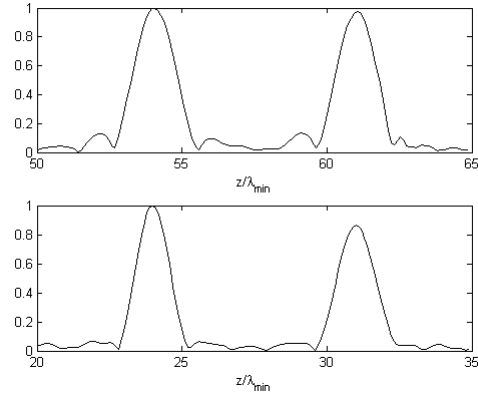


Fig. 5 Sulla risoluzione in profondità

$z = 77\lambda_{\min}$ della ricostruzione di due impulsi posti in $(-2\lambda_{\min}, 77\lambda_{\min})$ e $(2\lambda_{\min}, 77\lambda_{\min})$, per il caso multistatico (linea continua) e multimonostatico (linea a tratti). Per tutte le figure, l'andamento a gradino dei valori singolari [1,2] ha consentito di definire in maniera "virtualmente" indipendente dall'incertezza sui dati il livello di troncamento a $-10dB$.

Da tali figure si deduce che mentre la risoluzione in profondità dipende essenzialmente dalla diversità in frequenza utilizzata ed è quasi uniforme con la profondità, la risoluzione trasversa migliora con l'estensione del dominio di

osservazione, è uniforme al variare della coordinata trasversa e dipende solo dalla massima frequenza utilizzata. Inoltre, mentre la risoluzione in profondità non subisce nessun miglioramento nel passare dalla configurazione multistatica a quella multimonostatica, quella trasversa diviene circa la metà. Tali risultati sono in perfetto accordo con quelli ottenuti nei casi monodimensionali [1,2], non solo qualitativamente ma anche quantitativamente, come mostrato in [2].

Le Fig. 5 e 6 fanno riferimento per il caso multimonostatico allo stesso dominio di investigazione dei casi precedenti posto però alla distanza di $50\lambda_{\min}$ (parte superiore) e $20\lambda_{\min}$ (parte inferiore) dal dominio di osservazione assunto di estensione pari a $2x_0 = 70\lambda_{\min}$ per la banda $\beta \in [2\pi/1.5, 2\pi]$. Per tali casi l'approssimazione di Fresnel non risulta più valida. In particolare, nella Fig. 5 sono riportati i tagli lungo z per $x=0$ di ricostruzioni di impulsi posti a differenti profondità, mentre in Fig. 6 sono riportati i tagli lungo x per diverse profondità. Si nota che la risoluzione trasversa migliora rispetto alla corrispondente situazione in zona di Fresnel, mentre è possibile apprezzare un lieve miglioramento per quella in profondità solo per l'impulso più vicino al dominio di osservazione. Una tale dipendenza dai parametri geometrici della configurazione di misura è stata osservata anche per il caso di oggetti immersi in un

semispazio omogeneo [3] e può essere giustificata analizzando come lo spettro della funzione incognita ricostruibile varia con la configurazione [4].

CONCLUSIONI

Abbiamo mostrato come nelle ricostruzioni lineari la risoluzione ottenibile dipenda dalla configurazione di misura. In particolare, in zona di Fresnel le stime ottenute per i casi monodimensionali bene si applicano anche al presente caso di oggetti bidimensionali. Nel caso in cui il modello della diffusione sia approssimato ad un

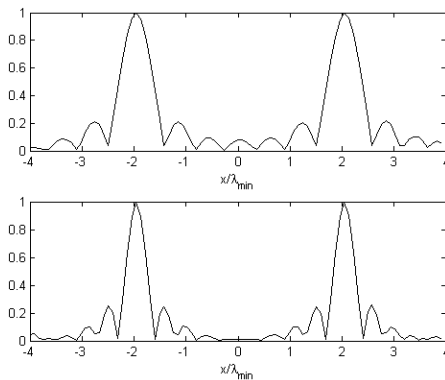


Fig. 6 Sulla risoluzione in profondità

ordine superiore rispetto a quello lineare è lecito aspettarsi migliori limiti in risoluzione, come mostrato per un modello quadratico in [5].

RIFERIMENTI

- [1] R. Pierri, A. Lisenò, R. Solimene, F. Tartaglione, "In-depth resolution from multifrequency Born fields scattered by a dielectric strip in the Fresnel zone," *J. Opt. Soc. Am.*, v. **19**, n. 6, 1234-1238, 2002.
- [2] R. Pierri, R. Solimene, F. Tartaglione, G. Leone, "Sensing geometry and frequency band effects on tomographic 2-D resolution in the Fresnel zone", XXVIIth General Assembly of the International Union of Radio Science, Maastricht, The Netherlands, Aug. 2002.
- [3] G. Leone, R. Solimene, "Resolution issues in linear algorithms for subsurface reconstruction" Proc. of Open Symposium on Propagation and Remote Sensing, , Garmisch-Partenkirchen, Germany, Feb. 2002.
- [4] G. Leone, F. Soldovieri, "Analysis of the distorted Born approximation for subsurface reconstruction: truncation and uncertainties effects" , accepted for publication on *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*.
- [5] G. Leone, R. Persico, R. Solimene, "A quadratic model for electromagnetic subsurface prospecting", accepted for publication on *AEÜ Int. J. on Electronics and Communication*.