

# SINTESI IN MEDIA QUADRATICA PESATA DEL DIAGRAMMA DI RADIAZIONE DI UNA SCHIERA CIRCOLARE DI ANTENNE

Roberto Vescovo

Dipartimento di Elettrotecnica Elettronica ed Informatica-Università di Trieste

Via A. Valerio, 10 – 34127 Trieste – Italy

Tel. +39-040-5583458 - E-mail: [vescovo@univ.trieste.it](mailto:vescovo@univ.trieste.it)

## Abstract

*A method of pattern synthesis for circular arrays of equally spaced elements is presented, which allows determining an array pattern belonging to a prescribed mask. Given a reference pattern selected within the mask, a weighted cost function is introduced which represents a distance between the generic array pattern and the reference pattern. Starting from a set of unitary weights of this function, the method modifies such weights iteratively and minimizes the cost function at each step. The algorithm is terminated when the minimization of this function yields an array pattern belonging to the mask.*

## I. INTRODUZIONE

In questo lavoro si presenta una tecnica iterativa semplice ed efficace per risolvere un problema di sintesi del diagramma di radiazione di una schiera circolare di antenne. La schiera si suppone costituita da  $N$  elementi equispaziati disposti su una circonferenza di raggio  $R$ , giacente sul piano  $xy$  di un sistema di riferimento Cartesiano  $O(x,y,z)$  e con il centro coincidente con l'origine di quest'ultimo.

Detto  $\mathbf{I}_0 = [I_{01}, I_{02}, \dots, I_{0N}]^T$  il vettore colonna delle eccitazioni complesse degli elementi della schiera, sia  $F(\mathbf{I}, \phi)$  il diagramma di radiazione corrispondente, dove  $\phi$  rappresenta l'angolo di azimuth della generica direzione di osservazione nel piano della schiera.

Tale diagramma è fornito dalla seguente formula:

$$F(\mathbf{I}, \phi) = \sum_{n=1}^N I_n f(\phi - \phi_n) \quad (1a)$$

dove: 
$$f(\phi) = p(\phi) \exp[j\beta R \cos(\phi - \phi_n)] \quad (1b)$$

in cui  $\phi_n = 2\pi N^{-1}n$  è la posizione angolare dell'elemento  $n$ ,  $\beta = 2\pi\lambda^{-1}$  dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda, e  $p(\phi)$  rappresenta il diagramma di radiazione del singolo elemento. Si vuole risolvere il seguente problema: date due funzioni reali positive  $F_{01}(\phi)$  ed  $F_{02}(\phi)$ , dove  $F_{01}(\phi) < F_{02}(\phi)$  nell'intervallo  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ , si vuole trovare un vettore di eccitazione  $\mathbf{I}_0 = [I_{01}, I_{02}, \dots, I_{0N}]^T$  il cui diagramma di radiazione  $F(\mathbf{I}_0, \phi)$  soddisfi alla condizione  $F_{01}(\phi) \leq |F(\mathbf{I}_0, \phi)| \leq F_{02}(\phi)$  per  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ . Si vuole cioè trovare un diagramma di radiazione appartenente alla “maschera” individuata da  $F_{01}(\phi)$  ed  $F_{02}(\phi)$ .

## II. IL METODO

La procedura proposta richiede, come primo passo, la scelta di una funzione  $F_0(\phi)$  appartenente alla maschera. Inoltre, l'intervallo  $-\pi \leq \phi \leq \pi$  viene ripartito in un

numero sufficientemente elevato  $W$  di sottointervalli di ampiezza  $\Delta = 2\pi / W$ , indicati con  $L_i = [\phi_i, \phi_{i+1}]$ , dove  $\phi_i = -\pi + (i-1)\Delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, W$ . Ad esempio, si può porre  $W=360$ .

Per ogni  $i=1, 2, \dots, W$ , si introduce il prodotto scalare:

$$\langle F, G \rangle_i = \int_{L_i} F(\phi) G^*(\phi) d\phi \quad (2)$$

dove l'asterisco indica il complesso coniugato. Come è noto, tale prodotto individua la norma (indotta)  $\|f\|_i = \sqrt{\langle f, f \rangle_i}$ . Quest'ultima permette di definire la funzione di costo

$$\rho^2(\mathbf{I}, \mathbf{T}) = \sum_{i=1}^W T_i \|F(\mathbf{I}, \phi) - F_0(\phi)\|_i^2 \quad (3)$$

dove  $\mathbf{T} = [T_1, T_2, \dots, T_W]^T$  è il vettore delle  $W$  variabili reali positive  $T_i$  che “pesano” i quadrati delle norme.

Inizialmente si pone  $T_1 = \dots = T_W = 1$ , individuando così il primo vettore “di peso”  $\mathbf{T}_1 = [1, 1, \dots, 1]^T$ , e si minimizza la funzione  $\rho^2(\mathbf{I}, \mathbf{T}_1)$ . Tale minimizzazione viene effettuata seguendo la procedura descritta nel prossimo paragrafo, e fornisce un primo vettore di eccitazione  $\mathbf{I}_1$ , a cui corrisponde il diagramma di radiazione  $F(\mathbf{I}_1, \phi)$ . Detto  $\xi_i = (\phi_i + \phi_{i+1})/2$  il punto medio dell'intervallo  $L_i$ , si calcola dapprima il valore del diagramma in  $\phi = \xi_i$ ,  $|F(\mathbf{I}_1, \xi_i)|$ . Se *non* risulta  $F_{01}(\xi_i) \leq |F(\mathbf{I}_1, \xi_i)| \leq F_{02}(\xi_i)$ , cioè se il diagramma in  $\xi_i$  *non* cade entro la maschera, si incrementa  $T_1$  di una quantità preassegnata  $\Delta T$  ponendo  $T_1 := T_1 + \Delta T$ . Si ottiene così un nuovo vettore di peso  $\mathbf{T}_2$  e quindi una nuova funzione di costo  $\rho^2(\mathbf{I}, \mathbf{T}_2)$ , la cui minimizzazione fornisce un secondo vettore di eccitazione  $\mathbf{I}_2$ ; se  $|F(\mathbf{I}_2, \xi_i)|$  non cade entro la maschera si incrementa ancora  $T_1$  di  $\Delta T$  fino a che il diagramma in  $\xi_i$  non cade entro la maschera. A questo punto un ulteriore processo iterativo riduce  $T_1$  al valore minimo necessario perché il diagramma cada entro la maschera. Successivamente si procede nel modo descritto con riferimento al punto  $\xi_2$ , poi a  $\xi_3$ , e così via fino a  $\xi_W$ . Il vettore di peso ottenuto dopo aver “passato” per la prima volta tutti i  $W$  punti  $\xi_k$  viene indicato con  $\mathbf{T}^{(1)}$ , e il corrispondente vettore di eccitazione con  $\mathbf{I}^{(1)}$ . A questo punto la procedura viene ripetuta passando di nuovo da  $\xi_1$  a  $\xi_W$ : il vettore di peso e quello di eccitazione così ottenuti vengono indicati con  $\mathbf{T}^{(2)}$  e  $\mathbf{I}^{(2)}$ , rispettivamente. Si continua poi in modo analogo, ottenendo una sequenza di vettori di eccitazione  $\{\mathbf{I}^{(k)}\}$  e la sequenza dei corrispondenti diagrammi di radiazione  $\{F_k\}$ . Il processo viene arrestato quando, per un certo vettore di eccitazione  $\mathbf{I}^{(k)}$ , il diagramma corrispondente cade entro la maschera per ogni  $\phi = \xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, W$ . In altre parole, si richiede che la sequenza  $\{d_k\}$ , in cui  $d_k$  rappresenta la distanza (di seguito definita) tra il diagramma  $F_k$  e l'insieme delle funzioni appartenenti alla maschera, si annulli entro un numero finito di passi. La distanza  $d_k$  qui considerata è data dalla relazione  $d_k = \min_{F \in M} d(|F_k|, |F|)$ , in cui  $M$  è l'insieme delle funzioni continue il cui modulo cade entro la maschera, e la distanza tra due funzioni  $F_1, F_2$  continue nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  è data da  $d(F_1, F_2) = \max_{-\pi \leq \phi \leq \pi} \{|F_2(\phi) - F_1(\phi)|\} \cong \max_{1 \leq k \leq W} \{|F_1(\xi_k) - F_2(\xi_k)|\}$ .

La sequenza  $\{d_k\}$  non è monotona, in generale. Tuttavia, un'analisi dei casi finora esaminati suggerisce che, ogniqualvolta la maschera impone vincoli non eccessivamente stringenti, la sequenza  $\{d_k\}$  si annulla entro un numero finito di passi. In caso di vincoli fortemente stringenti la sequenza può manifestare un comportamento oscillatorio, oppure può decrescere molto lentamente; in tal caso l'algoritmo si arresta dopo un numero prefissato di passi e fornisce la soluzione corrispondente al minimo valore  $d_k$  ottenuto.

### III. MINIMIZZAZIONE DELLA FUNZIONE DI COSTO

Sfruttando le (1) e (2), la (3) può essere rappresentata nel modo seguente:

$$\rho^2(\mathbf{I}, \mathbf{T}) = \sum_{m=1}^N I_m^* \sum_{n=1}^N A_{mn} I_n + \sum_{i=1}^W \|F_0\|_i^2 T_i - \sum_{n=1}^N I_n^* \sum_{i=1}^W \langle F_0, f_n \rangle_i T_i - \sum_{n=1}^N I_n \sum_{i=1}^W \langle F_0, f_n \rangle_i^* T_i \quad (4a)$$

dove:

$$A_{mn} = \sum_{i=1}^W \langle f_n, f_m \rangle_i T_i \quad (4b)$$

Imponendo le  $N$  condizioni  $\partial \rho^2 / \partial I_p^* = 0$ ,  $p=1, \dots, N$ , e sfruttando (4a) e (4b), si perviene all'equazione matriciale lineare:

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{b} \quad (5a)$$

dove:

$$\mathbf{A} = [A_{mn}], \quad m, n = 1, 2, \dots, N \quad (5b)$$

$$\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_N]^T, \quad b_n = \sum_{i=1}^W \langle F_0, f_n \rangle_i T_i \quad (5c)$$

Fissato un vettore  $\mathbf{T}$ , la matrice  $\mathbf{A}$  e il vettore  $\mathbf{b}$  restano individuati, e il vettore di eccitazione  $\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  soluzione della (5a) minimizza la funzione di costo in (4a).

### IV. UN ESEMPIO NUMERICO

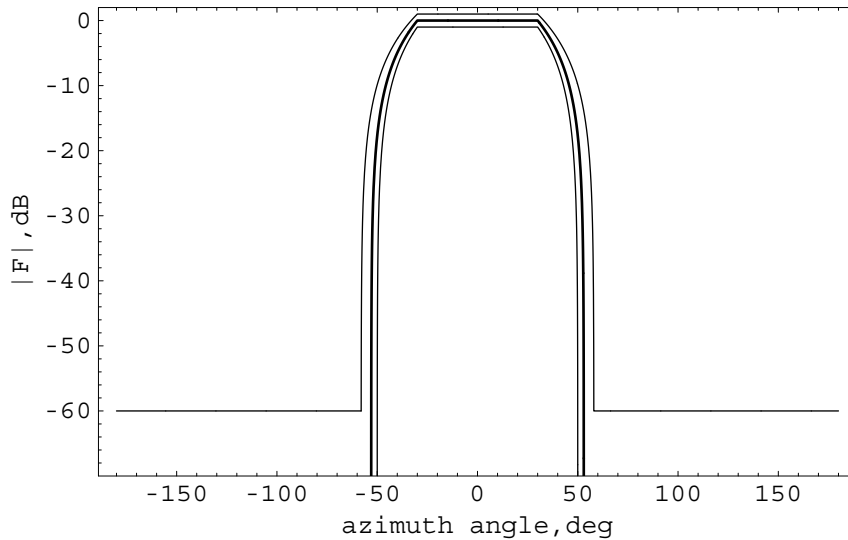
Si è considerata una schiera circolare di  $N=32$  elementi omnidirezionali, di raggio  $R = 2.4\lambda$ . Con riferimento a tale schiera si è considerato il problema di trovare un diagramma di radiazione appartenente alla maschera illustrata in Fig. 1. A tale scopo è stata applicata la tecnica proposta partendo dal diagramma  $F_0(\phi)$  mostrato in Fig. 1. Il diagramma sintetizzato è illustrato in Fig. 2. Il tempo di calcolo è risultato di circa cinque minuti su un calcolatore MacIntosh G4 dotato di sistema operativo OS 9.1, impiegando Mathematica.

Risultati altrettanto buoni sono stati ottenuti anche in numerose altre situazioni (schiere di diverse dimensioni, con differente numero di elementi e con diagramma di elemento a cardioide). In situazioni con vincoli più severi il tempo di calcolo è risultato anche nettamente più elevato di quello relativo all'esempio mostrato (alcune decine di minuti). In compenso, si sono ottenuti risultati molto accurati, paragonabili a quelli forniti dal metodo di Zhou e Ingram [1]. Tuttavia quest'ultimo metodo richiede, per ogni problema, la preventiva determinazione di due parametri (detti guadagni di iterazione), il che rende l'algoritmo di non immediata applicabilità. Il metodo qui proposto non presenta questo problema, ma (a differenza di quello in [1]) nella

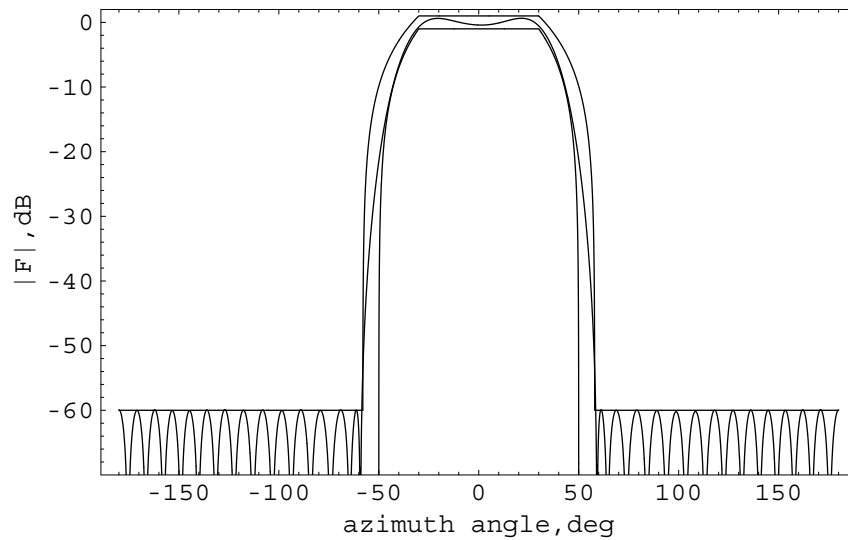
formulazione attuale è applicabile solo alle schiere circolari. Tuttavia si ritiene che il metodo possa essere esteso a geometrie più generali.

## V. BIBLIOGRAFIA

- [1] P. Y. Zhou and M. A. Ingram, "Pattern Synthesis for Arbitrary Arrays Using an Adaptive Array Method," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-47, pp.862-869, May 1999.



**Fig. 1.** Maschera (linee sottili) e diagramma di partenza  $F_0(\phi)$  (linea grossa)



**Fig. 2.** Diagramma sintetizzato.