

INFLUENZA DEL TERRENO NEL CALCOLO DEL CAMPO ELETTERICO E MAGNETICO PRODOTTO DA LINEE ELETTRICHE¹

M.Bini, D.Andreuccetti, R.Olmi, N.Zoppetti

CNR-IFAC, Istituto di Fisica Applicata "Nello Carrara"

via Panciatichi 64, 50127 Firenze

m.bini@ifac.cnr.it

Abstract

The effects of the ground is accounted for in a very simplified way by almost all computer programs used for computing the E and B fields of power lines: ground is assumed to be a perfect conductor for computing E and it is just ignored when computing B . In this paper, charges and currents induced by a power line into the ground are computed assuming realistic values for ground conductivity and permittivity then the resulting B and E fields are evaluated. Differences with values obtained by the simplified model are discussed and situations in which these differences may assume some relevance are presented.

1. Introduzione

Anche se in genere non si può prescindere da misure dirette, il disporre di strumenti di calcolo affidabili e verificati può facilitare enormemente il lavoro di controllo del rispetto dei limiti intorno alle linee di trasporto e distribuzione dell'energia elettrica. Inoltre, esistono casi in cui il calcolo è l'unico modo per determinare il valore dei campi: tali sono, ad esempio, le valutazioni di impatto ambientale relative ad elettrodotti non ancora realizzati oppure le ricerche epidemiologiche retrospettive, nelle quali i valori del campo magnetico vengono ricostruiti dai dati storici delle correnti sulla linea.

A 50 Hz, frequenza a cui viene generata e fornita l'energia elettrica, la lunghezza d'onda è così grande ($\lambda \cong 6000$ km), rispetto alle dimensioni della regione di spazio in cui si svolgono i fenomeni di interesse, che il termine di spostamento risulta assolutamente trascurabile e il campo elettrico E e quello magnetico B possono essere calcolati l'uno indipendentemente dall'altro, nell'ambito dell'approssimazione *quasi-statica*. Nella maggior parte dei programmi di calcolo oggi utilizzati², si ipotizza inoltre che il terreno abbia le caratteristiche di un conduttore perfetto (conducibilità infinita), per quanto riguarda il calcolo di E , mentre ne viene del tutto ignorata la presenza nel calcolo di B .

Anche se queste approssimazioni sono soddisfatte nella maggior parte dei casi pratici, ha interesse indagarne la validità per almeno due ordini di motivi: (1) esistono situazioni, sia pure di incidenza pratica limitata, nelle quali le correnti indotte nel terreno producono un campo magnetico che può modificare in maniera apprezzabile l'intensità del campo presente nello spazio al di sopra del suolo e inoltre (2) risulta senz'altro poco soddisfacente che la presenza del

¹ Lavoro eseguito con il parziale supporto del Progetto MIUR "Salvaguardia dell'uomo e dell'ambiente dalle emissioni elettromagnetiche".

² Si veda, ad esempio, *Guida ai metodi di calcolo dei campi elettrici e magnetici generati da linee elettriche*, Norma CEI 211-4, 1996.

terreno venga trattata in maniera così diversa nel calcolo di E e di B : terreno perfettamente conduttore (e, quindi, uso del principio delle immagini) nel calcolo del campo elettrico, niente terreno e niente immagini nel calcolo del campo magnetico.

In questa breve memoria, sia pure rimanendo all'interno dell'approssimazione quasi-statica, il terreno viene rappresentato con le sue proprietà elettriche (costante dielettrica ε e conducibilità σ) effettive.

2. Calcolo del campo magnetico B

Si abbia una linea elettrica (v. Figura 1), modellata con conduttori paralleli di lunghezza infinita, percorsa da un sistema di correnti bilanciate³ I_n , frequenza $f=50$ Hz. I cavi sono in aria (mezzo 1), sospesi ad altezze h_n su un semi-mondo con le caratteristiche del terreno reale (mezzo 2). Date le simmetrie del problema, il potenziale vettore \vec{A} ha solo la componente lungo \hat{z}

(direzione delle correnti) e, nell'approssimazione quasi-statica, non è difficile mostrare che ubbidisce alla equazione di Laplace nel mezzo 1:

$$\nabla^2 A_1 = 0 \quad (1)$$

e all'equazione di Helmholtz nel mezzo 2:

$$\nabla^2 A_2 = ip^2 A_2 \quad (2)$$

in cui $p = \sqrt{2\pi f \mu_0 \sigma}$ e μ_0 indica la permeabilità magnetica del vuoto. La soluzione può essere ottenuta utilizzando una procedura standard (si veda ad es.⁴),

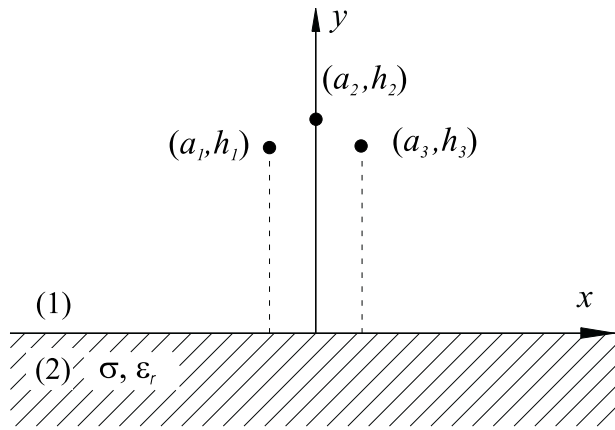


Figura 1 Rappresentazione di linea su terra

anche se troppo laboriosa per essere riportata qui. In sostanza, la soluzione viene espressa in forma integrale sovrapponendo autofunzioni del tipo $C(k)\exp(\pm ky)\cos(kx)$ ed imponendo che: (1) H tangenziale e B normale siano continui all'interfaccia fra i due mezzi; (2) il campo \vec{B} riproduca quello della linea nelle immediate vicinanze di questa. Per brevità, riportiamo qui soltanto le espressioni del campo \vec{B} nello spazio sopra il suolo e del potenziale vettore A_2 all'interno del terreno (Eq. (3) – (5), con $q = \sqrt{k^2 + ip^2}$), per un solo conduttore (I_n^{mo}); sommando sull'indice n si ottiene il campo prodotto da tutti i conduttori (*principio di sovrapposizione*). Il primo termine sotto segno di integrale, nelle espressioni di \vec{B} , rappresenta il campo primario del conduttore (quello che sarebbe presente se non ci fosse il suolo), mentre il secondo termine costituisce il contributo delle correnti che scorrono nel terreno. A questo proposito, si noti che, se q diviene molto grande (conducibilità e/o frequenza estremamente elevate), il coefficiente $-(k-q)/(k+q)$ tende a +1 e il campo prodotto dalle correnti indotte nel terreno ha la forma di quello di in un filo di corrente posto in $(a_i, -h_i)$, in accordo con il

³ Le quantità I_n sono fasori. In una linea monofase l'indice n assume i valori da 1 a 2 e le fasi differiscono di 180 gradi fra loro; in una linea trifase l'indice n va da 1 a 3, i fasori hanno uguale ampiezza e sono sfasati di 120 gradi l'un l'altro.

⁴ J.A Tegopoulos and E.E. Kries: "Eddy currents in linear conducting media", Elsevier 1985.

principio delle immagini per linee di corrente in presenza di un conduttore ideale. Analogamente, per conducibilità basse (diciamo $\sigma < 10^{-3}$ S/m) $q \cong k$ e l'effetto del terreno sul campo magnetico diventa praticamente trascurabile.

$$B_{1x}^{(n)}(x, y) = \frac{\mu_0 I_n}{2\pi} \int_0^\infty \left(e^{-|y-h_n|k} - \frac{k-q}{k+q} e^{-(y+h_n)k} \right) \cos k(x-a_n) dk \quad (3)$$

$$B_{1y}^{(n)}(x, y) = \frac{\mu_0 I_n}{2\pi} \int_0^\infty \left(e^{-|y-h_n|k} + \frac{k-q}{k+q} e^{-(y+h_n)k} \right) \sin k(x-a_n) dk \quad (4)$$

$$A_2^{(n)}(x, y) = \frac{\mu_0 I_n}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-h_n k + qy}}{k+q} \cos k(x-a_n) dk \quad (5)$$

Il campo elettrico è, come è noto, direttamente legato al potenziale vettore dalla relazione $\vec{E} = -i\omega\vec{A}$; quindi, per la corrente nel terreno, si può scrivere: $\vec{j}^{(n)} = -i\omega\sigma\vec{A}_2^{(n)}$. La Figura 2 mostra l'andamento della densità di corrente indotta nel terreno (profondità, 0.1m) da una linea trifase, singola terna. Inoltre, la Figura 3 confronta il modulo di B , dovuto alle correnti indotte, con il campo primario della linea (quello, cioè, che sarebbe presente se il suolo non ci fosse). Il campo totale (non riportato qui, per brevità) è il risultante della somma fasoriale di questi due contributi. Come si può notare, il campo delle correnti indotte presenta un andamento che decade più lentamente del campo primario. La distribuzione spaziale delle correnti indotte è infatti molto più diffusa rispetto a quella raccolta e concentrata delle correnti sulla linea.

Quanto all'importanza del contributo delle correnti indotte, si vede che nel caso di terreno

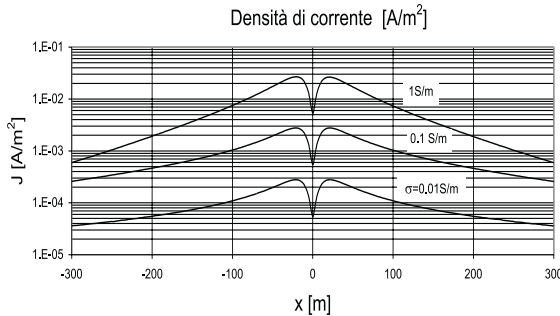


Figura 2 Corrente indotta nel terreno ($y = -0.1$ m) da linea trifase per alcuni valori di conducibilità σ ; $I = 1500$ A, $a_1 = -a_3 = 7$ m, $a_2 = 0$; $h_1 = h_2 = h_3 = 20$ m.

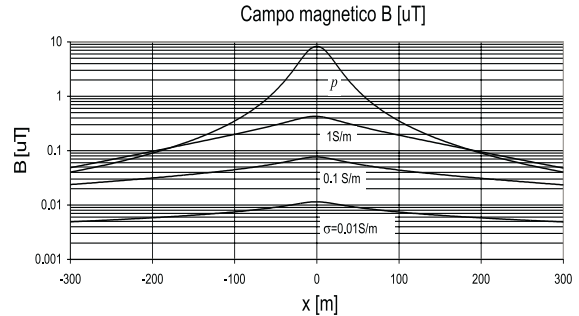


Figura 3 Campo magnetico B ($y=0$), dovuto alla linea primaria (p) e alle correnti indotte nel suolo. Caratteristiche della linea come in Figura 2.

con bassa conducibilità ($\sigma \cong 10^{-2}$ S/m), la sua influenza risulta modesta (trascurabile per $\sigma < 10^{-3}$ S/m), mentre nel caso di terreno molto conduttivo ($\sigma \geq 10^{-1}$ S/m) l'effetto del terreno si fa sentire specie a distanza della linea. Per questa ragione esso può costituire un elemento non trascurabile nel calcolo della distanza a cui si raggiungono prestabiliti livelli di campo magnetico, nel caso che questi siano posti a valori bassi (es. $0.2 \mu\text{T}$, valore spesso proposto come *obiettivo di qualità* per la normativa italiana).

3. Calcolo del campo elettrico E

Nel caso del campo elettrico, la condizione $\partial \vec{B} / \partial t = 0$ (insieme alla già citata assunzione di assenza di corrente di spostamento), permette di disaccoppiare le equazioni relative al campo

elettrico da quelle per il campo magnetico. Questa assunzione permette di derivare il campo elettrico da una funzione potenziale V per la quale vale l'equazione di Laplace anche nella regione (2) (cioè, all'interno del terreno). Il problema può pertanto essere risolto con una tecnica simile a quella descritta nel paragrafo precedente, e cioè: sviluppo in autofunzioni dell'operatore laplaciano e imposizione delle opportune *boundary conditions* all'interfaccia aria/terreno.

Una via più rapida (e sostanzialmente equivalente) per arrivare alla soluzione è quella di assimilare il terreno ad un mezzo dielettrico complesso per il quale vale la relazione costitutiva

$$\vec{D} = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}_r \vec{E}, \text{ dove } \tilde{\epsilon}_r = \epsilon_r - i\sigma / \omega\epsilon_0, \text{ ovvero, } \tilde{\epsilon}_r \equiv -i\sigma / \omega\epsilon_0, \quad \rho_{l-}^n = -\rho_l^n \frac{\tilde{\epsilon}_r - 1}{\tilde{\epsilon}_r + 1} \quad (6)$$

$$\text{per tutte le situazioni di interesse pratico (ad es.: } \sigma / \omega\epsilon_0 > 10^3, \text{ per } \sigma = 10^{-5} \text{ S/m, corrispondente ad un terreno estremamente resistivo). In questo quadro, si può mostrare}^5 \text{ che, per quanto } \rho_{le}^n = \rho_l^n \frac{2}{\tilde{\epsilon}_r + 1} \quad (7)$$

riguarda la *regione sopra il suolo*, il campo elettrico può essere calcolato rappresentando la linea con un insieme di conduttori con densità di carica ρ_l^n e tenendo conto del terreno (e delle cariche indotte sulla sua superficie) mediante un insieme di conduttori localizzati nei *punti immagine* e carichi con densità di carica ρ_{l-}^n , data dalla (6). Si noti che, in tutti i casi di interesse pratico è, come abbiamo già detto, $\sigma / \omega\epsilon_0 \gg 1$ e quindi $\rho_{l-}^n \equiv -\rho_l^n$; ovvero, la soluzione coincide con quella fornita dall'applicazione del principio delle immagini nella sua formulazione classica.

Per quanto riguarda invece il *campo elettrico nel terreno*, esso viene calcolato sostituendo ogni conduttore reale con un *conduttore equivalente*, la cui densità di carica ρ_{le}^n è data dalla (7). Utilizzando i valori tipici di conducibilità del terreno, è facile mostrare che $|E|$ nel terreno ha intensità molto minore di quella del campo sopra il suolo. Ne consegue che il terreno al di sotto della linea può essere considerato equipotenziale, una proprietà che risulta estremamente utile per legare fra loro densità di carica e potenziale dei conduttori.

4. Conclusioni

Si è visto che alla frequenza di 50Hz il problema del calcolo del campo \vec{E} e \vec{B} in presenza di terreno, con le caratteristiche che tipicamente si incontrano in pratica, può essere separato in un problema quasi-magnetostatico (qms) e quasi-elettrostatico (qes).

La soluzione del problema qms è ottenuta con un approccio analogo a quello utilizzato per il calcolo delle correnti parassite nei mezzi conduttori. Il risultato è che l'effetto delle correnti indotte per induzione magnetica nel terreno è in genere trascurabile e può divenire confrontabile con il campo primario solo a distanza dalla linea e con terreni ad alta conducibilità.

Il problema qes è stato risolto sia utilizzando una procedura standard per l'integrazione dell'equazione di Laplace, sia sfruttando l'analogia con *linee di densità di carica filiformi* in prossimità di un mezzo dielettrico con permittività complessa $\tilde{\epsilon}_r$ molto elevata. La soluzione mostra che il campo elettrico al di sopra del suolo coincide, per tutti i valori di conducibilità di interesse pratico, con quello che si ottiene con il classico principio delle immagini. In più, il metodo da noi descritto permette il calcolo della densità di corrente indotta nel terreno, cosa che con il principio delle immagini classico non è ovviamente possibile.

⁵ P.Lorrain and D.R. Corson: *Electromagnetic fields and waves*, 3rd Ed., W.H Freeman 1988, p. 213.