Hybrid full-wave analysis of circular and elliptical horns.

C. Tomassoni †, A.S. Omar ‡, M. Mongiardo †

†DIEI, University of Perugia, Via G. Duranti, 93, 06125, Perugia, Italy. e-mail: tomassoni@diei.unipg.it

‡Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Magdeburg, Germany.

***Abstract* — An hybrid method based on Generalized Multipole Technique (GMT), modal analysis and novel analytical expressions is presented for rigorous full-wave analysis of horn antennas. The method allows to compute input scattering parameters and radiation patterns for horn antennas with finite or infinite flange plane. Results are presented to validate the theory.**

I. Introduzione

In questo articolo viene affrontato il problema dell'analisi di horn corrugati circolari ed ellittici sia dal punto di vista del calcolo dei coefficienti di scattering, sia dal punto di vista del Diagramma di Radiazione (DdR).

Il calcolo dei coefficienti di scattering in strutture come gli horn si presta bene all'utilizzo di metodi ibridi poiché richiede la soluzione di due tipi di problema: il problema aperto ed il problema chiuso [1]. Parlando di problema chiuso ci riferiamo alla parte interna dell'horn, dove sono presenti una successione di discontinuità in guida, mentre con problema aperto ci riferiamo alla discontinuità fra l'apertura dell'horn e lo spazio libero. è esperienza comune che il mode-matching (MMT - [Mode-Matching Technique]) rappresenti un'ottima tecnica per risolvere il problema interno. Per il problema esterno invece possono essere utilizzati vari metodi. Un approccio molto comune è quello che utilizza la funzione di Green del semispazio libero [2] e che richiede l'ipotesi di flangia infinita. Recentemente tale metodo è stato applicato efficientemente anche al caso di aperture ellittiche [3] e verrà qui utilizzato a scopo di confronto.

Anche il problema del calcolo dei diagramma di radiazione può essere risolto in varie maniere. Un metodo molto comune è quello che prevede la trasformata del campo elettrico sull'apertura [1]. Tale metodo viene spesso utilizzato in concomitanza con il sopracitato metodo della funzione di Green, poiché entrambi prevedono l'ipotesi di flangia infinita.

In questo articolo proponiamo l'utilizzo del metodo ibrido MMT-GMT (Mode-Matching Technique - Generalized Multiple Technique) per il calcolo sia dei coefficienti di scattering sia del diagramma di radiazione. Tale metodo ha il vantaggio di considerare la reale forma esterna dell'horn, evitando così l'ipotesi di flangia infinita e consentendo il calcolo del campo vicino e retro-irradiato. In aggiunta presentiamo una nuova efficiente formula in forma chiusa per il calcolo del diagramma di radiazione di horn ellittici. Tale formula è basata sul sopracitato metodo della trasformata del campo sull'apertura e consente di evitare l'ntegrazione numerica bidimensionale.

II. Teoria

Entrambi i metodi che andremo a presentare (vedi Fig.1) fanno uso del MMT per l'analisi della parte interna dell'horn. L'applicazione del MMT alle guide ellittiche viene fatta utilizzando una formula molto efficiente e completamente analitica per il calcolo degli integrali d'accoppiamento [4] e non verrà qui trattata. I parametri di scattering relativi all'intero horn saranno poi ottenuti facendo la cascata delle matrici [S] del problema aperto e chiuso.

Di seguito accenneremo alla soluzione del problema aperto e del calcolo del diagramma di radiazione, sia nel caso di flangia infinita (funzione di Green + trasformata del campo sull'apertura) sia in quello di flangia finita (GMT).

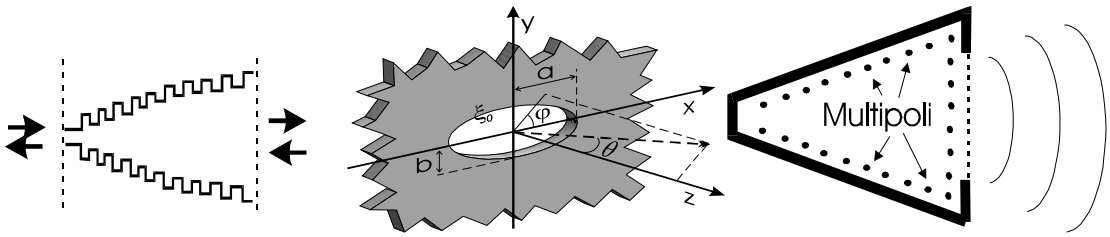

Fig. 1: Da sinistra a destra: problema chiuso, problema aperto caso flangia infinita e problema aperto caso flangia finita.

A. Flangia infinita: funzione di Green e trasformata del campo sull'apertura

Per quanto riguarda il calcolo dei parametri di scattering dell'apertura, essi vengono calcolati a partire dalla matrice di ammettenza, il cui generico elemento i, j equivale all'ampiezza del campo magnetico dell'$i-esimo$ modo dell'apertura generato imponendo il campo elettrico del $j-esimo$ modo con ampiezza unitaria. Per il calcolo del campo magnetico generato dal campo elettrico (correnti magnetiche) sull'apertura, ci serviamo della funzione di Green del semispazio espressa in coordinate ellittiche [3]. Per l'applicazione di tale metodo è necessaria l'ipotesi di flangia infinita (vedi Fig. 1), che ci assicura che, sul piano $z = 0$, il campo elettrico sia diverso da zero soltanto sull'apertura.

Per quanto riguarda il calcolo del diagramma di radiazione invece, l'ipotesi di flangia infinita ci consente di utilizzare il metodo della trasformata di Fourier del campo sull'apertura [1]. In particolare abbiamo introdotto una nuova formula che consente il calcolo del DdR in forma chiusa, evitando la classica integrazione numerica bidimensionale. Tale formula si applica espandendo il campo sui modi dell'apertura e sommando poi il contributo di ogni modo. A titolo d'esempio di seguito riportiamo la formula nel caso del generico $m-esimo$ modo $TM_{p,q}^{E/O}$ [5]:

$$\mathbf{E}_t^{(TM)}(\theta,\varphi) = \mathbf{f}_m^{(TM)}(k_x,k_y) = \frac{k_x\mathbf{x}_0 + k_y\mathbf{y}_0}{k_{c_m}^2 - k_t^2} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial\xi} Ce_p(\rho k_{c_m},\xi_0) \\ \frac{\partial}{\partial\xi} Se_p(\rho k_{c_m},\xi_0) \end{array} \right\} \sqrt{8\pi} j^{p-1}\ \widetilde{\psi}_m(\hat{x},\hat{y}) \tag{1}$$

dove

$$k_x = k_t\cos\varphi\ ;\ k_y = k_t\sin\varphi\ ;\ k_t = k\sin\theta \qquad \hat{x} = \frac{k_x}{k_c}a\ \ ;\hat{y} = \frac{k_y}{k_c}b \tag{2}$$

Naturalmente, θ e φ indicano la direzione lungo la quale stiamo calcolando il DdR, $\mathbf{x}_0$ ($\mathbf{y}_0$) rappresenta il versore dell'asse x (y), k è il numero d'onda e k_{c_m} il numero d'onda al cutoff dell'$m-esimo$ modo, mentre ξ_0 è la coordinata ellittica che individua il contorno della nostra apertura di semidistanza focale ρ, semiasse maggiore a e semiasse minore b. La funzione $\widetilde{\psi}_m(x,y)$ è una funzione definita su tutto il piano xy:

$$\widetilde{\psi}_m(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} Ce_p(\rho k_{c_m},\xi)ce_p(\rho k_{c_m},\eta) & \text{modi pari} \\ Se_p(\rho k_{c_m},\xi)se_p(\rho k_{c_m},\eta) & \text{modi dispari} \end{array} \right.$$

naturalmente il punto (ξ,η) in coordinate ellittiche coincide con il punto (x,y) in coordinate cartesiane, mentre $ce_p(h,\eta)$ ($Ce_p(h,\xi)$) e $se_p(h,\eta)$ ($Se_p(h,\xi)$) rappresentano rispettivamente le funzioni di Mathieu (funzioni di Mathieu modificate) pari e dispari, di primo tipo e ordine p.

B. Flangia finita: Generalized Multipole Technique

La GMT [6, 7] è in grado di tenere conto non soltanto della flangia finita, ma anche della reale forma esterna metallica tridimensionale dell'horn.

Con riferimento alla Fig. 1, tale metodo si basa sull'espansione del campo elettromagnetico esterno all'horn in termini del campo generato da L multipoli elementari TE TM all'interno dell'horn, distribuiti vicino la superficie esterna:

$$\mathbf{E}_{external}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_l} Q_{lm}\ \mathbf{E}_{lm}(\mathbf{r}) \tag{3}$$

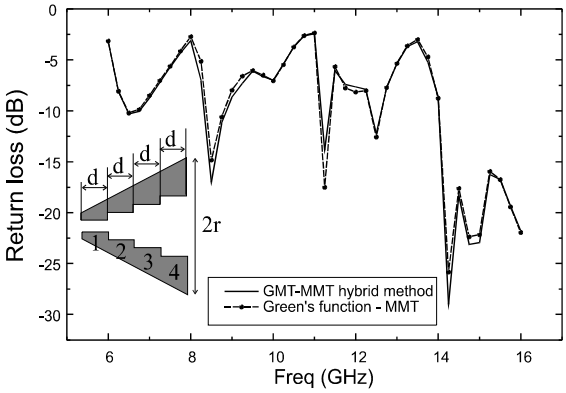

Fig. 2: Confronto fra il metodo ibrido MMT-GMT (flangia finita) ed il metodo MMT-funzione di Green (flangia infinita), per i coefficenti di riflessione all'ingresso dell'horn schematizzato in figura.

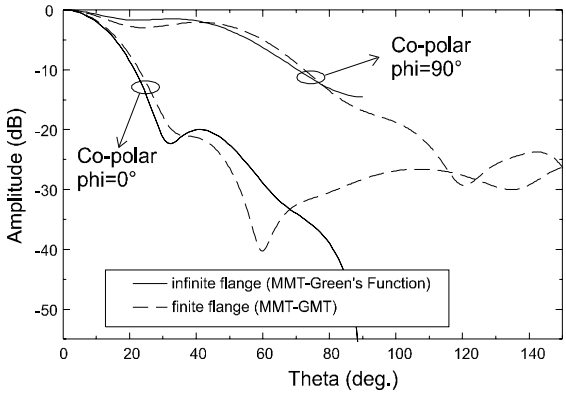

Fig. 3: Campo co-polare per $\varphi = 0$ e $\varphi = 90$ gradi. Confronto caso flangia infinita e flangia finita per la struttura schematizzata in Fig. 2 alla freq. di 8.5 GHz. Il campo cross-polare è nullo.

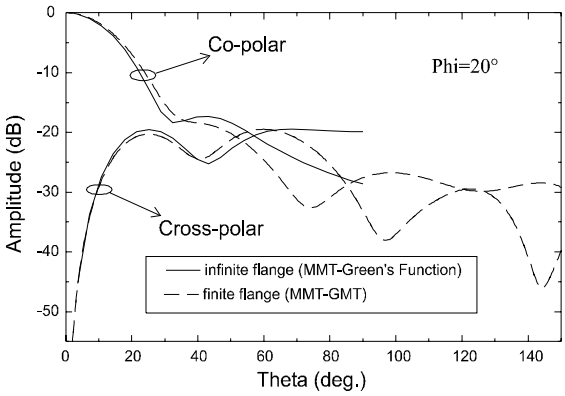

Fig. 4: Come in Fig. 3 ma per campo co-polare e cross-polare per $\varphi = 20$ gradi.

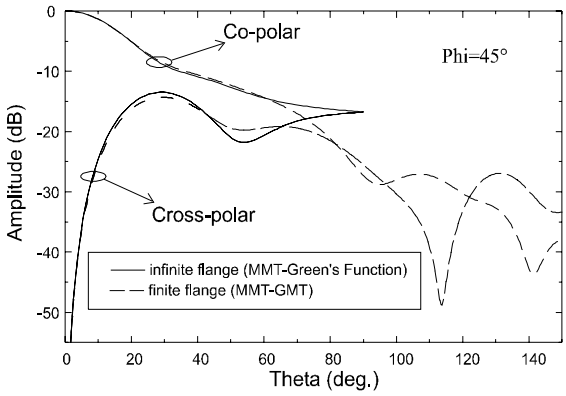

Fig. 5: Come in Fig. 3 ma per campo co-polare e cross-polare per $\varphi = 45$ gradi.

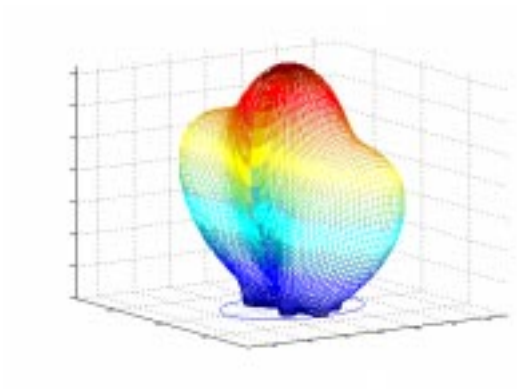

Fig. 6: Diagramma di radiazione tridimensionale in coordinate polari del campo co-polare ottenuto con il metodo MMT-funzione di Green. L'ellisse in basso schematizza l'apertura

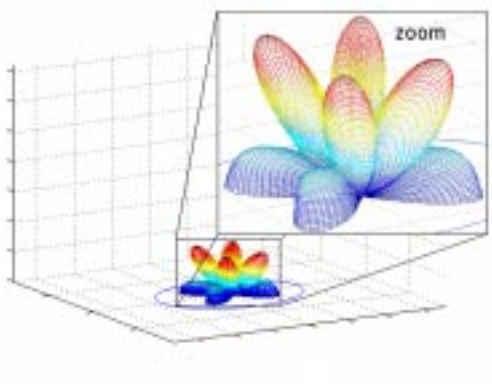

Fig. 7: Diagramma di radiazione tridimensionale in coordinate polari del campo cross-polare ottenuto con il metodo MMT-funzione di Green. L'ellisse in basso schematizza l'apertura

$$\mathbf{H}_{external}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M_l} Q_{lm}\, \mathbf{H}_{lm}(\mathbf{r}) \tag{4}$$

dove ($\mathbf{E}_{lm}(\mathbf{r})$,$\mathbf{H}_{lm}(\mathbf{r})$) rappresenta il campo elettromagnetico radiato dall'$m-esimo$ multipolo posizionato nell'$l-esimo$ punto, mentre Q_{lm} è il corrispondente (e al momento sconosciuto) coefficiente di espansione. Il calcolo dell'elemento i, j della matrice di ammettenza anche in questo caso corrisponde all'ampiezza del campo magnetico relativo al $j-esimo$ modo dell'apertura generato dall'aver imposto sull'apertura il campo elettrico relativo all'$i-esimo$ modo con ampiezza unitaria. In particolare, imporre il campo elettrico sull'apertura (e imporre che il campo elettrico tangente sia nullo sulla superficie metallica esterna) ci permette, tramite tecniche numeriche, di calcolare i coefficienti di espansione Q_{lm} dalla (3). Una volta noti i coefficienti di espansione possiamo calcolare il relativo campo magnetico utilizzando la (4).

Ovviamente, le equazioni (3)-(4) ci permettono anche di calcolare il DdR una volta noto il campo elettrico sull'apertura. In particolare, rispetto al metodo con flangia infinita, in questo caso siamo in grado di calcolare anche il campo retro-irradiato e il campo vicino.

III. Risultati

I due metodi presentati in questo articolo sono stati confrontati simulando l'horn schematizzato in Fig. 2. Con riferimento a tale figura, indicando con a_i e b_i il semiasse maggiore e minore, espressi in millimetri, dell'i-esimo tratto di guida, abbiamo: $a_1 = 15, b_1 = 10$; $a_2 = 25, b_2 = 16.5$; $a_3 = 35, b_3 = 23$; $a_4 = 45.15, b_4 = 33.85$, mentre $d = 20mm$ e il raggio della flangia $r = 70mm$.

Sempre in Fig. 2 è graficato il confronto fra i coefficienti di scattering ottenuti con i due metodi, mentre nelle Fig. 3-5 il confronto è relativo ai diagrammi di radiazione calcolati ad una frequenza di 8.5 GHz e per gli angoli φ e le polarizzazioni specificate in ogni singola figura. Il campo co-polare e cross-polare è quello relativo alla terza definizione di Ludwig. Naturalmente, data la presenza della flangia infinita, il metodo relativo alla funzione di Green è graficato per valori di θ fino a 90 gradi.

Infine, nelle Fig. 6 e Fig. 7 sono graficati rispettivamente i DdR tridimensionali del campo co-polare e cross-polare in coordinate polari.

IV. Conclusione

Abbiamo confrontato due metodi per la simulazione di horn ellittici e circolari. In entrambe i casi il problema delle discontinuità interne dell'horn è risolto tramite analisi modale; il problema esterno è affrontato nel primo metodo con la GMT, mentre nel secondo si è utilizzata la funzione di Green del semispazio libero che prevede l'ipotesi di flangia infinita. Il confronto fra i due metodi dimostra un buon accordo sia per quanto rigurda il calcolo dei coefficienti di scattering all'ingresso dell'horn, sia per quanto rigurda il calcolo dei diagrammi di radiazione del campo co-polarizzato e del campo cross-polarizzato.

References

[1] A.D. Olver, P.J.B., Clarricoats, A.A. Kishk, and L. Shafai *Microwave Horns and Feeds*, New York: IEEE Press, 1994.

[2] W. L. Croswell, R. C: Rudduck and D. M. Hatcher, "Tha Admittance of a Rectangular Waveguide Radiating into a Dielectric Slab", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, no. 5 sept. 1967, pp.627-633.

[3] Mauro Mongiardo and Cristiano Tomassoni, "Mutual coupling evaluation for arrays of flange-mounted elliptical waveguides", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 49, Issue: 5 pp. 763-770, May 2001.

[4] Mauro Mongiardo and Cristiano Tomassoni, "Modal analysis of Discontinuities between Elliptical Waveguides", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-48, pp. 597-605, Apr. 2000.

[5] Cristiano Tomassoni and Mauro Mongiardo, Manuscript in preparation

[6] C. Hafner, *The Generalized Multipole Technique for Computational Electromagnetics*, Artech House, 1990.

[7] Eikichi Yamashita, *Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems*, Artech House, 1990.