Un metodo per la diffusione elettromagnetica inversa basato sulla ricostruzione delle correnti non misurabili

Salvatore Caorsi[1], Gian Luigi Gragnani[2]

[1]Dipartimento di Elettronica – Università di Pavia
Via Ferrata 1, 27100 Pavia
caorsi@ele.unipv.it

[2]Dipartimento di Ingegneria Biofisica ed Elettronica – Università di Genova
Via Opera Pia 11/A, 16145 Genova
gragnani@dibe.unige.it

Abstract

A spatial-domain method for inverse-scattering is presented. Starting from an integral-equation formulation of the scattering phenomena, the problem is rewritten as an inverse-source one, in which, however, the nonmeasurable components of the equivalent current density are explicitely accounted for. By means of a singular value decomposition of the Green operator, the measurable components are computed and then inserted into a nonlinear equation whose solution provides the coefficients of the nonmeasurable components and the dielectric features of the body under test.

1. Introduzione e definizione del problema

Oggetto di questo lavoro è la ricostruzione di profili dielettrici bidimensionali inomogenei, utilizzando la formulazione basata sulle equazioni integrali della diffusione elettromagnetica nel dominio spaziale. La scena in esame è illuminata da un campo elettromagnetico incidente noto e si suppone di poter effettuare misure in punti esterni all'area di indagine. Assumendo un'illuminazione di tipo trasverso magnetico rispetto all'asse del dielettrico il problema è ridotto a bidimensionale e scalare.

Poichè l'informazione raccolta nello spazio dei dati non è in generale sufficiente per risolvere univocamente il problema della ricostruzione dielettrica, nel presente lavoro viene esplicitamente considerato il problema delle cosiddette correnti non radianti o più in generale, delle correnti "non misurabili", che, pur non essendo rilevabili nella zona di misura, concorrono in maniera non trascurabile alla formazione del campo e. m. all'interno dell'oggetto diffusore.

Al di là delle correnti non radianti, che producono un campo esattamente nullo al di fuori del proprio supporto, possono comunque esistere (e in effetti esistono per la maggior parte dei casi) componenti di campo diffuso evanescenti le quali non contribuiscono, di fatto, al campo nel punto di misura.

Un'ulteriore complicazione del problema viene inoltre dai vincoli che sono usualmente posti, in un problema reale, sul dominio di misura. Infatti, se i punti di misura sono inferiori al necessario, si può avere un'ulteriore perdita di informazione; d'altro canto, se più di un punto fornisce praticamente la stessa misura, a meno di termini non rilevabili dal sensore (o dal processo di simulazione), è possibile incorrere in una ulteriore instabilità nella soluzione (risulta quindi anche impraticabile l'uso di un numero di punti di misura arbitrariamente elevato). In effetti la misura può fornire soltanto una informazione limitata sugli oggetti sotto indagine e tale quantità di informazione è legata ai cosiddetti "'gradi di libertà" del problema [1].

La mancata determinazione delle componenti non misurabili dalle misure conduce quindi ad instabilità e non unicità della soluzione. L'approccio usuale è quello di "filtrare" (esplicitamente od implicitamente) il contributo delle correnti non misurabili alla soluzione, ottenendo quella che viene comunemente chiamata soluzione a "norma minima". La soluzione a norma minima ha il vantaggio dell'unicità, tuttavia, per le ragioni esposte in precedenza, essa è rappresentativa solo in parte degli oggetti diffusori da ricostruire; in particolare, nella pratica, l'utilizzo della soluzione a minima norma produce ricostruzioni affette da un marcato effetto "passa basso".

Tali considerazioni possono essere formalizzate descrivendo il problema tramite due equazione integrali della diffusione, una valida nei punti di misura (equazione dei dati) e l'altra valida in punti interni all'oggetto stesso (equazione di stato) ed utilizzando una decomposizione in valori singolari (SVD) dell'operatore di Green [2]. Tale decomposizione permette di dividere in maniera esplicita la corrente in una parte misurabile (che contribuisce alla formazione del dato di misura) ed in una parte non misurabile, che produce campo essenzialmente soltanto entro l'oggetto diffusore in esame. La stessa decomposizione evidenzia come, nello spazio delle correnti, siano individuabili due sottospazi tra loro ortogonali, uno generatore della parte misurabile, l'altro della parte non misurabile.

L'algoritmo proposto consta essenzialmente in una procedura a due passi: nella prima fase si provvede a generare, tramite SVD, una base ortonormale per le correnti (misurabili e non misurabili). Si ottiene un problema lineare rispetto alle correnti incognite, la soluzione del quale fornisce i coefficienti (rispetto alla base valutata in precedenza) della parte misurabile delle correnti medesime. Noti tali coefficienti è immediato risalire alla usuale soluzione a minima norma per le correnti. Nel secondo passo, sfruttando l'ortogonalità tra la parte misurabile e quella non misurabile delle correnti, ed utilizzando l'equazione di stato, viene affrontata la determinazione della distribuzione dielettrica e delle componenti non misurabili rispetto alla base definita, riconducendo il problema alla minimizzazione di un funzionale di costo non lineare.

2. Formulazione matematica

Si considerino le seguenti equazioni, che modellano il problema nel caso 2D con illuminazione TM:

$$E_s(\rho) = \frac{k_0^2}{j4} \int \tau(\rho') E_t(\rho') H_0^{(2)}\left(k_0 \left|\rho - \rho'\right|\right) d\rho' \tag{1}$$

$$E_t(\rho) = E_i(\rho) + \frac{k_0^2}{j4} \int \tau(\rho') E_t(\rho') H_0^{(2)}\left(k_0 \left|\rho - \rho'\right|\right) d\rho' \tag{2}$$

dove: E_i è il campo incidente sul dominio dielettrico; E_s è il campo di scattering nella zona di misura; E_t rappresenta il campo totale (incognito) all'interno del dominio dielettrico; $\tau = \varepsilon_r - 1$ è la funzione oggetto (incognita) ed $H_0^{(2)}$ rappresenta la funzione di Green per il problema. Il problema inverso è ovviamente non lineare, in quanto, nelle equazioni (1) e (2), la τ (incognita) è moltiplicata per E_t, anch'esso incognito.

La discretizzazione del problema viene effettuata su una griglia regolare di N celle, in cui si assumono le quantità costanti. Inoltre si suppone di effettuare M misure di campo al di fuori di tale griglia. Si perviene alle seguenti equazioni matriciali:

$$[e_s] = [H_{ext}]\,[T]\,[e_t] \qquad\qquad [e_t] = [e_i] + [H_{int}]\,[T]\,[e_t] \tag{3}$$

con: $[e_s]$ vettore delle misure; $[T]$ matrice diagonale che contiene i valori della funzione oggetto nel dominio discretizzato; $[e_t]$ vettore dei valori del campo totale nel dominio discretizzato ed $[e_i]$ vettore dei valori del campo incidente nel dominio discretizzato;

Per superare la non linearità utilizziamo la sostituzione $[p] = [T][e_t]$ (dove $[p]$ ha componenti proporzionali alla corrente equivalente), ottenendo:

$$[e_s] = [H_{ext}][p] \qquad\qquad [e_t] = [e_i] + [H_{int}][p] \tag{4}$$

Le equazioni (4) sono lineari in $[p]$, tuttavia il problema di inverse-scattering viene trasformato in un problema di inverse-source. Ciò comporta il dover affrontare gli aspetti tipici di tale problema: in particolare, l'informazione contenuta nel vettore $[e_s]$ non è sufficiente a ricostruire completamente $[p]$, ma soltanto quella parte di esso che produce effetti misurabili nel dominio dei dati. Consideriamo infatti la SVD della matrice $[H_{ext}]$:

$$[H_{ext}] = [U][\Sigma][V]^* \tag{5}$$

Supponiamo $M < N$ (il numero di misure disponibili è solitamente piccolo rispetto alla discretizzazione) e la matrice $[H_{ext}]$ sia (per ora) di rango M. Esprimendo $[p]$ nella forma:

$$[p] = [V][\gamma] \qquad [\gamma] = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{bmatrix} \tag{6}$$

dalle (5-6) si ottiene:

$$\gamma_j \sigma_j \left[u_j\right] = \gamma_j [H_{ext}] \left[v_j\right] \quad j = 1, \ldots, N \qquad \text{e} \qquad \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \sigma_j \left[u_j\right] = [e_s] \tag{7}$$

Siccome

$$\sigma_j \left[u_j\right] = 0 \quad \forall j > M \tag{8}$$

risulta evidente che, al più, solo le prime M componenti di $[p]$ (rispetto alla base ortonormale $[V]$) sono mappate nel dominio delle misure. Per queste componenti i coefficienti γ sono dati da:

$$\gamma_j = \sigma_j^{-1} \left\{ \left[u_j\right]^* [e_s] \right\} \qquad j = 1, \ldots, M \tag{9}$$

e

$$[p]_{mn} = \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^{-1} \left\{ \left[u_j\right]^* [e_s] \right\} \left[v_j\right] \tag{10}$$

è la cosiddetta soluzione a norma minima della prima equazione (4). Purtroppo il problema della limitatezza del numero di misure non è il solo che affligge la soluzione. In generale occorrerà tenere in conto gli effetti del rumore, sia di misura che computazionale, per cui le componenti di $[p]$ relative ai valori singolari più piccoli non potranno comunque essere ricostruite dalle misure. Sia allora $R < M$ il numero massimo di coefficienti ottenibili dalle misure: per ricostruire i restanti $N - R$ valori riscriviamo $[p]$ come:

$$[p] = [p]_R + [p]_{N-R} = [V] \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} \left\{ [u_1]^* [e_s] \right\} \\ \vdots \\ \sigma_R^{-1} \left\{ [u_R]^* [e_s] \right\} \\ \cdots\cdots \\ 0 \end{bmatrix} + [V] \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ \gamma_{R+1} \\ \vdots \\ \gamma_N \end{bmatrix} = [V] \left[[\gamma]_R + [\gamma]_{N-R} \right] \tag{11}$$

Moltiplicando la seconda delle (4) per $[T]$ e sostituendo la (11) si ottiene la seguente espressione, in cui le incognite sono i valori della funzione oggetto e gli $N-R$ coefficienti γ che non possono essere ricostruiti dalle misure:

$$[[I]-[T]\,[H_{int}]]\,[V]\,[[\gamma_R]+[\gamma_{N-R}]] = [T]\,[e_i] \tag{12}$$

In generale, usando Q differenti viste, la soluzione può essere ottenuta come minimo del funzionale:

$$f\left([T]\,,[\gamma_{N-R}]\right) = \sum_{q=1}^{Q} \left\| [[I]-[T]\,[H_{int}]]\,[V]_q \left[[\gamma_R]_q + [\gamma_{N-R}]_q\right] - [T]\,[e_i]_q \right\|^2 \tag{13}$$

Tale funzionale può essere minimizzato utilizzando tecniche numeriche tradizionali [3], oppure ricorrendo a metodi stocastici, come il “simulated-annealing” [4].

3. Risultati numerici e conclusioni

L’efficienza della metodica proposta è stata valutata attraverso simulazioni numeriche di ricostruzione dielettrica, sia di oggetti omogenei che non omogenei, effettuando anche comparazioni con i risultati ottenibili dalla soluzione a norma minima. In tutti gli esempi studiati, l’introduzione delle correnti non misurabili nella soluzione ha portato ad un netto miglioramento sia nella ricostruzione dei contorni dell’oggetto, sia nella determinazione quantitativa dei valori della funzione oggetto, rispetto alla soluzione a norma minima. In particolare, si è osservato come la ricostruzione mediante il metodo proposto consenta di evitare il marcato effetto passa-basso, che si ha tipicamente quando si utilizza soltanto la soluzione a minima norma.

I vantaggi del metodo proposto rispetto alla ricostruzione a norma minima sono quindi evidenti. È interessante osservare come, anche rispetto ad altri algoritmi di ricostruzione non lineari, i quali utilizzano simultaneamente l’equazione dei dati e quella di stato, il metodo proposto consenta di porre in evidenza (e quindi di operare di conseguenza) quale parte dell’informazione sia ottenibile dalle misure e quale parte, invece, debba essere recuperata, eventualmente facendo ricorso a conoscenze a priori, dall’equazione di stato del problema.

4. Bibliografia

[1] M. Bertero, C. De Mol, and E. R. Pike, “Linear inverse problems with discrete data, I, General formulation and singular system analysis”, *Inverse Problems*, vol. 1, pp. 301-330, 1985.

[2] F. Natterer, “Numerical treatment of ill-posed problems”, in *Inverse Problems*, G. Talenti, Editor, *Lecture Notes in Mathematics*, 1225, Springer-Verlag, 1986.

[3] S. Caorsi and G. L. Gragnani, “Inverse-scattering method for dielectric objects based on the reconstruction of the nonmeasurable equivalent current density”, *Radio Sci.*, vol. 34, pp. 1-8, 1999.

[4] S. Caorsi, G. L. Gragnani, S. Medicina, M. Pastorino and G. Zunino, “Microwave imaging method using a simulated annealing approach”, *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. MGWL-1, n. 11, pp. 331-333, 1991.