ELECTROMAGNETIC COUPLING AMONG BODIES OF REVOLUTION USING INTEGRAL EQUATIONS

P. Bolli[1], G.G. Gentili[2], R. Nesti[3], G. Pelosi[1]
bolli@ingfi9.det.unifi.it, gentili@elet.polimi.it, nesti@arcetri.astro.it, pelosi@det.unifi.it

[1]Department of Electronics and Telecommunications
University of Florence – Via C. Lombroso 6/17, I-50134 – Florence, Italy
[2]IRITI-CNR – Department of Electronics
Politecnico di Torino – C.so Duca degli Abruzzi 24, I–10129 – Turin, Italy
[3]Arcetri Astrophysical Observatory
National Astrophysic Institute – Largo Enrico Fermi 5, I–50125 – Florence, Italy

Abstract

In this work a numerical technique for an accurate modelling of the coupling between neighbouring circular horns is proposed. This problem is of high interest in modern applications, where clusters of feeds are more and more used in antenna systems to increase performances. The scattering problem, both for a stand alone Body of Revolution (BoR) and for coupled BoRs, has been solved using the Combined Field Integral Equation (CFIE) approach, with subdomain triangular functions along the contour generating the BoR surface and with $\sin(m\phi)$ *and* $\cos(m\phi)$*, with m integer, for the azimuthal coordinate* ϕ*.*

1. INTRODUZIONE

Lo scopo del presente lavoro è quello di proporre una metodologia per lo studio dell'accoppiamento elettromagnetico tra oggetti perfettamente conduttori con simmetria di rivoluzione attraverso il Metodo dei Momenti (*Method of Moment*, MoM).

Numerosi lavori, [1,2], sono stati sviluppati per la ricerca di funzioni di base particolarmente efficienti per studiare problemi di reirradiazione da BoR; quando più BoR sono introdotti, la simmetria di rivoluzione generale è persa (a meno che i BoR non siano coassiali) e quindi le funzioni di base convenzionali, che non sfruttano cioè la simmetria dei singoli BoR, sono utilizzate; l'oggetto del presente contributo è quello di estendere le funzioni di base introdotte nel caso di singolo BoR, anche in presenza di più BoR. Il contributo è organizzato come segue: nella seconda sezione è descritta la condizione di continuità ed il metodo numerico utilizzato, nella terza è introdotta la teoria dei BoR ed infine nella quarta sono presentati alcuni risultati numerici.

2. METODO DEI MOMENTI E CFIE

Il problema della reirradiazione da oggetti perfettamente conduttori illuminati da sorgenti nello spazio libero, è risolto applicando il teorema di equivalenza, sostituendo cioè il corpo con correnti elettriche e magnetiche tali da garantire la condizione al contorno nella superficie dell'oggetto considerato. A seconda di imporre la condizione al contorno sul campo elettrico o sul campo magnetico si ottengono rispettivamente l'equazione integrale del campo elettrico (EFIE, *Electric Field Integral Equation*) e l'equazione integrale del campo magnetico (MFIE, *Magnetic Field Integral Equation*). Riferendosi alla teoria dei potenziali, le equazioni, valide rispettivamente per la EFIE e per la MFIE, sono le seguenti:

$$\boldsymbol{L}_E(\boldsymbol{J}) \triangleq \left[-j\omega\boldsymbol{A} - \nabla'\Phi\right]_{tan} = \boldsymbol{E}_{tan}^{inc} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{J}+\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{L_H}(\boldsymbol{J})\triangleq\frac{1}{2}\boldsymbol{J}-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{n}'\times\nabla'\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{H}^{inc} \tag{2}$$

dove $\boldsymbol{E}^{inc}$ e $\boldsymbol{H}^{inc}$ rappresentano il campo elettrico e magnetico incidenti, $\boldsymbol{A}$ e Φ rispettivamente il potenziale vettore e scalare e $\boldsymbol{n}'$ la normale alla superficie *S*.
Tali equazioni non garantiscono l'unicità della soluzione della corrente elettrica per le frequenze di risonanze della cavità racchiusa dalla superficie in cui si sta applicando il teorema di equivalenza; per ovviare a tale problema, s'introduce una combinazione lineare delle due, [3]:

$$\gamma\boldsymbol{L_E}(\boldsymbol{J})+(1-\gamma)\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{J}+\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{L_H}(\boldsymbol{J})\right]=\gamma\boldsymbol{E}_{tan}^{inc}+(1-\gamma)\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{H}^{inc} \tag{3}$$

con γ costante reale.
Data l'impossibilità analitica di risolvere tali equazioni, si ricorre al metodo numerico del MoM, riconducendo così il problema elettromagnetico alla soluzione di un sistema lineare. Tale metodo prevede tre passaggi fondamentali: introduzione delle funzioni di base, $\{\boldsymbol{J}_i\}$, introduzione delle funzioni di peso, $\{\boldsymbol{W}_j\}$ ed infine definizione di un prodotto interno, $\langle\boldsymbol{J}_i,\boldsymbol{W}_j\rangle$. Effettuati questi passaggi, si è in grado di scrivere la (3) come un sistema lineare:

$$\left[\gamma\underline{\underline{Z}}^{EFIE}+(1-\gamma)\underline{\underline{Z}}^{MFIE}\right]\left[\underline{J}\right]=\left[\gamma\underline{V}^{EFIE}+(1-\gamma)\underline{V}^{MFIE}\right] \tag{4}$$

dove $\underline{\underline{Z}}^{EFIE}$ e $\underline{\underline{Z}}^{MFIE}$ rappresentano le matrici delle impedenze rispettivamente per EFIE e MFIE, considerazione analoga per i vettori dei termini noti; $\underline{J}$, infine, rappresenta il vettore incognito. I singoli elementi delle matrici delle impedenze dipendono attraverso operatori integro-differenziali dalle funzioni di peso, dalle funzioni di base e dalla funzione di Green nello spazio libero, $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, secondo le seguenti relazioni:

$$Z_{ji}^{EFIE}=\iint_S\iint_{S'}\left[j\omega\boldsymbol{W}_j(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{r})+\frac{1}{j\omega\varepsilon}\left(\nabla'\cdot\boldsymbol{W}_j(\boldsymbol{r}')\right)\left(\nabla\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{r})\right)\right]G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')dSdS' \tag{5}$$

$$\begin{aligned}Z_{ji}^{MFIE}=\frac{1}{2}\iint_{S'}\boldsymbol{W}_j(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{r}')dS'+\iint_S\iint_{S'}\Big\{&\left[\boldsymbol{n}'\cdot\nabla'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\left[\boldsymbol{W}_j(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{r})\right]-\\&-\left[\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{r})\right]\left[\nabla'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{W}_j(\boldsymbol{r}')\right]\Big\}dSdS'\end{aligned} \tag{6}$$

con $\boldsymbol{r}$ punto sorgente e $\boldsymbol{r}'$ punto d'osservazione.
La risoluzione di (5) e (6) risulta piuttosto complessa a meno di introdurre alcune semplificazioni valide per corpi di rivoluzione, [2].

3. CORPI DI RIVOLUZIONE

La simmetria di rivoluzione dell'oggetto reirradiante permette di descrivere completamente il BoR attraverso due soli parametri: la variabile lungo la generatrice (t) e la variabile azimutale (ϕ), (Fig.1). Le funzioni utilizzate come base per lo sviluppo della corrente elettrica sono simili a quelle proposte da Harrington e Mautz, e consistono in una dipendenza attraverso funzioni triangolari a sotto-dominio per la variabile lungo la generatrice e in una dipendenza attraverso funzioni trigonometriche per la variabile azimutale, [2]. Le funzioni di peso sono scelte uguali a quelle di base.

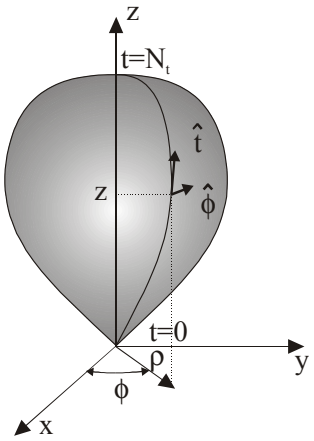

Fig.1 – *Corpo di rivoluzione e sistema di coordinate*

Le funzioni di base possono essere raggruppate in tre set (*0*, *u*, *v*) ciascuno con una componente lungo il versore $\boldsymbol{t}$ ed una lungo il versore $\boldsymbol{\phi}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_{lm}^{tu} = f_l(t)\cos(m\phi)\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{J}_{lm}^{\phi u} = -f_l(t)\sin(m\phi)\boldsymbol{\phi} \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{J}_{l}^{t0} = f_l(t)\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{J}_{l}^{\phi 0} = f_l(t)\boldsymbol{\phi} \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{J}_{lm}^{tv} = f_l(t)\sin(m\phi)\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{J}_{lm}^{\phi v} = f_l(t)\cos(m\phi)\boldsymbol{\phi} \end{cases} \tag{7}$$

dove $f_l(t) = \dfrac{T(t-t_l)}{\rho}$ con $T(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t|<1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases}$, ed inoltre $m = 1,2..N_\phi$ e $l = 1,2..N_t$, sono due interi, che rappresentano rispettivamente l'ordine azimutale e il triangolo considerato. La corrente viene, quindi, riscritta come sommatoria delle suddette funzioni di base attraverso $2N_t\left(1+2N_\phi\right)$ coefficienti incogniti:

$$\boldsymbol{J} = \sum_i I_i \boldsymbol{J}_i = \sum_{l=1}^{N_t} \left\{ I_l^{t0}\boldsymbol{J}_l^{t0} + I_l^{\phi 0}\boldsymbol{J}_l^{\phi 0} + \sum_{m=1}^{N_\phi} \left[I_{lm}^{tu}\boldsymbol{J}_{lm}^{tu} + I_{lm}^{\phi u}\boldsymbol{J}_{lm}^{\phi u} + I_{lm}^{tv}\boldsymbol{J}_{lm}^{tv} + I_{lm}^{\phi v}\boldsymbol{J}_{lm}^{\phi v} \right] \right\} \tag{8}$$

La matrice delle impedenze, sia nel caso EFIE che nel caso MFIE, risulterà essere a blocchi:

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Z}}^{00} & \underline{\underline{Z}}^{0u} & \underline{\underline{Z}}^{0v} \\ \underline{\underline{Z}}^{u0} & \underline{\underline{Z}}^{uu} & \underline{\underline{Z}}^{uv} \\ \underline{\underline{Z}}^{v0} & \underline{\underline{Z}}^{vu} & \underline{\underline{Z}}^{vv} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Il primo apice indica il set utilizzato per la funzione di peso ed il secondo quello per la funzione di base. Ciascun blocco è in realtà una sotto-matrice contenente il prodotto interno tra funzione di base e funzione di peso per tutti i modi azimutali e per tutti i triangoli. L'ortogonalità delle funzioni di base e di peso determina che molti elementi della matrice siano nulli, in particolare quelli riferiti a differenti set e quelli che coinvolgono ordini azimutali differenti.

Nell'estensione al caso multiplo, si considerano, per semplicità di trattazione, due BoR identici. Il sistema necessiterà di un numero di incognite doppio rispetto al caso del singolo BoR; la matrice delle impedenze assume quindi la seguente forma:

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Z}}_{11} & \underline{\underline{Z}}_{12} \\ \underline{\underline{Z}}_{21} & \underline{\underline{Z}}_{22} \end{bmatrix} \tag{10}$$

I blocchi nella diagonale rappresentano le matrici delle impedenze di ciascun BoR e, avendo supposto i BoR identici, saranno tra di loro uguali; i blocchi fuori dalla

diagonale rappresentano le matrici delle impedenze legate all'accoppiamento tra i due BoR. Nella valutazione di questi ultimi termini, per poter sfruttare le funzioni di base introdotte nel caso di singolo BoR, dovranno essere utilizzati due sistemi di riferimento locali, rispetto ai quali entrambi i BoR presentano la simmetria di rivoluzione; la funzione di Green, invece, dovrà essere riferita ad un sistema globale. Inoltre per le sotto-matrici $\underline{\underline{Z}}_{12}$ e $\underline{\underline{Z}}_{21}$ non risultano più ortogonali né il set *0* con i set *u* e *v*, né elementi con differenti modi azimutali.

4. RISULTATI NUMERICI

Si mostra ora un risultato numerico relativo alla reirradiazione di due sfere, con raggio 0.1*m*, poste distanti 0.3*m* lungo l'asse *x* ed illuminate da un'onda piana con direzione incidente pari a $\theta^{inc} = 30°$ e $\phi^{inc} = 30°$, ampiezza pari a $E_\theta^{inc} = 100\frac{V}{m}$ e frequenza pari a $f = 3GHz$. In Fig.2 si riporta l'ampiezza della componente lungo $\boldsymbol{\theta}$ del campo elettrico reirradiato nel piano $\phi = 0°$, ottenuto implementando la EFIE, la MFIE, la CFIE ed infine il pacchetto commerciale FEKO, [4], così da validare il codice fin qui sviluppato.

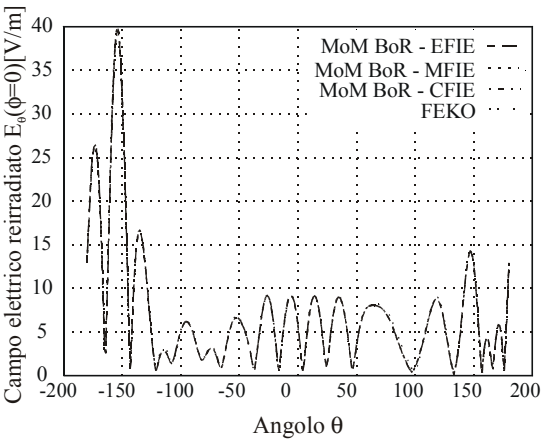

Fig.2 – *Ampiezza campo elettrico reirradiato da due sfere*

5. CONCLUSIONI

Nel presente contributo si è descritta una nuova metodologia per lo studio di fenomeni di accoppiamento elettromagnetico tra corpi di rivoluzione; in particolare si è mostrato un esempio di reirradiazione da due sfere risolvendo sia la EFIE, sia la MFIE e sia la CFIE. Tali risultati sono stati, infine, validati attraverso il confronto con le simulazioni effettuate con FEKO.

BIBLIOGRAFIA

[1] M.G. Andreasen, "*Scattering from Bodies of Revolution*," IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-13, n. 4, pp. 303-310, Mar. 1965.

[2] J.R. Mautz, and R.F. Harrington, "*Radiation and Scattering from Bodies of Revolution*," Appl. Sci. Res., vol. 20, pp. 405-435, June 1969.

[3] J.R. Mautz, and R.F. Harrington, "*H-Field, E-Field, and Combined-Field Solutions for Conducting Bodies of Revolution*," A.E.U. (Germany), vol. 32, n. 4, pp. 157-164, Apr. 1978.

[4] FEKO Suite 3.05, EM Software and Systems, Technopark, Stellenbosh, 7600, South Africa; http://www.feko.co.za.