Diffusione elettromagnetica da superfici dielettriche rugose: il metodo delle interazioni multiple ordinate

Antonio Iodice

Dipartimento di Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Università di Napoli "Federico II", via Claudio 21, 80125, Napoli.

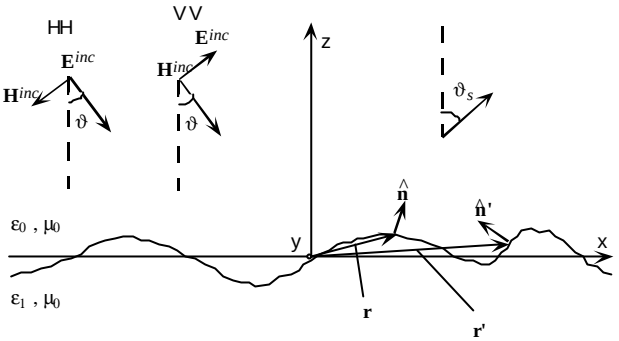
Abstract *- The Method of Ordered Multiple Interactions (MOMI), or Forward-Backward (FB) method, is a recently proposed efficient technique for numerical evaluation of scattering from perfectly or highly conducting rough surfaces* [*1-3*]. *In this paper, FB method is generalised to analyse scattering from dielectric rough interfaces. Convergence of the obtained method is analysed first of all by framing it within the theory of iterative methods for the solution of linear systems, then by using a sound physical interpretation of the iterative procedure, and finally by performing numerical experiments.*

1. INTRODUZIONE

Il calcolo del campo elettromagnetico diffuso da una superficie rugosa può essere effettuato sia utilizzando metodi analitici approssimati, sia impiegando metodi numerici. I primi consentono una migliore comprensione del fenomeno fisico considerato, ma hanno un regime di validità piuttosto limitato. I secondi hanno un ambito di validità molto esteso, e pertanto spesso sono gli unici a poter essere utilizzati; tuttavia i loro risultati sono di interpretazione meno immediata. Inoltre tali metodi, tra i quali il più diffuso nel caso in esame è il metodo dei momenti (MdM), sono molto onerosi dal punto di vista del tempo di elaborazione. Le equazioni integrali da risolvere per valutare i campi superficiali vengono infatti convertite in sistemi di equazioni lineari, la cui soluzione diretta richiede l'inversione di una matrice NxN e dunque un numero di moltiplicazioni complesse dell'ordine di N^3, dove N è proporzionale al numero (necessariamente molto grande) di elementi nei quali viene discretizzata la superficie diffondente. Per ridurre tale complessità di calcolo è possibile utilizzare tecniche di risoluzione iterative. Tra queste, una tecnica molto efficiente è il metodo delle interazioni multiple ordinate (*Method of Ordered Multiple Interactions,* MOMI), detto anche *Forward-Backward* (FB), recentemente proposto in [1] e [2] in due formulazioni diverse ma equivalenti. Questo metodo consente di valutare il campo diffuso da una superficie rugosa costituita da un conduttore elettrico perfetto [1-2] o da un buon conduttore [3], nel caso di problemi bidimensionali (cioè, sia i campi che la quota della superficie si suppongono costanti lungo una direzione). Il numero di moltiplicazioni complesse necessarie è dell'ordine di N^2, e può essere ulteriormente ridotto a N usando il metodo di accelerazione spettrale proposto in [4]. In questo lavoro, il metodo MOMI viene esteso al caso più generale di diffusione elettromagnetica da una interfaccia tra l'aria e un mezzo dielettrico con perdite. La convergenza del metodo iterativo così ottenuto viene quindi analizzata sia teoricamente che sperimentalmente. Infine, la validità del metodo viene verificata confrontando i risultati da esso ottenuti con quelli ottenuti usando il MdM risolto con una tecnica diretta.

2. DESCRIZIONE DEL METODO

Nel descrivere il metodo MOMI, esteso al caso di interfaccia dielettrica (Fig.1), si farà riferimento alla polarizzazione orizzontale; tuttavia, per la polarizzazione verticale si ottengono risultati del tutto analoghi. Usando il MdM, ed in particolare impiegando come funzioni di base impulsi rettangolari e come funzioni peso impulsi di Dirac, la coppia di equazioni integrali da risolvere per valutare le densità di corrente superficiali equivalenti viene convertita nella seguente coppia di equazioni matriciali:



$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}_0 \underline{E} + \underline{\underline{Z}}_0 \underline{J}_s &= \underline{E}^{inc} \\ \underline{\underline{S}}_1 \underline{E} + \underline{\underline{Z}}_1 \underline{J}_s &= \underline{0} \end{aligned} \quad , \qquad (1)$$

Figura 1: Geometria del problema

in cui le incognite $\underline{J}_s$ ed $\underline{E}$ sono rispettivamente i vettori rappresentativi delle correnti superficiali elettriche e magnetiche. Le espressioni complete degli elementi delle matrici che appaiono nella (1) sono riportate in [5].

La (1) può essere espressa in forma più compatta come:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{y} \quad , \qquad (2)$$

dove
$$\underline{\underline{A}}_{ij} = \begin{pmatrix} S_{0ij} & Z_{0ij} \\ S_{1ij} & Z_{1ij} \end{pmatrix}, \ \underline{x}_i = \begin{pmatrix} E_i \\ J_{s,i} \end{pmatrix}, \ \underline{y}_i = \begin{pmatrix} E_i^{inc} \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Nella (3) $\underline{\underline{A}}_{ij}$ sono sottomatrici 2x2 della matrice $\underline{\underline{A}}$, che pertanto ha $2N$ x $2N$ elementi, dove N è il numero di funzioni di base usate per espandere le funzioni incognite (pari al numero di elementi nei quali viene discretizzata la superficie). A questo punto, poniamo

$$\underline{\underline{S}}_0 = \underline{\underline{S}}_0^D - \underline{\underline{S}}_0^L - \underline{\underline{S}}_0^U, \ \underline{\underline{Z}}_0 = \underline{\underline{Z}}_0^D - \underline{\underline{Z}}_0^L - \underline{\underline{Z}}_0^U, \ \underline{\underline{S}}_1 = \underline{\underline{S}}_1^D - \underline{\underline{S}}_1^L - \underline{\underline{S}}_1^U, \ \underline{\underline{Z}}_1 = \underline{\underline{Z}}_1^D - \underline{\underline{Z}}_1^L - \underline{\underline{Z}}_1^U \qquad (4)$$

e
$$\underline{E} = \underline{E}^f + \underline{E}^b, \qquad \underline{J}_s = \underline{J}_s^f + \underline{J}_s^b \quad , \qquad (5)$$

dove $\underline{\underline{S}}_{0,1}^D$ e $\underline{\underline{Z}}_{0,1}^D$ sono la parte diagonale rispettivamente di $\underline{\underline{S}}_{0,1}$ e $\underline{\underline{Z}}_{0,1}$, $-\underline{\underline{S}}_{0,1}^L$ e $-\underline{\underline{Z}}_{0,1}^L$ ne sono la parte triangolare inferiore, e $-\underline{\underline{S}}_{0,1}^U$ e $-\underline{\underline{Z}}_{0,1}^U$ la parte triangolare superiore. Le (5) scompongono le correnti superficiali nei loro contributi "progressivi", $\underline{E}^f$ e $\underline{J}_s^f$, e "regressivi", $\underline{E}^b$ e $\underline{J}_s^b$. Essi soddisfano le seguenti equazioni:

$$\underline{\underline{D}}^{(\pi)} \underline{x}^f = \underline{y} + \underline{\underline{L}}^{(\pi)} \left(\underline{x}^f + \underline{x}^b \right) \quad , \qquad (6)$$

$$\underline{\underline{D}}^{(\pi)} \underline{x}^b = \underline{\underline{U}}^{(\pi)} \left(\underline{x}^f + \underline{x}^b \right) \quad , \qquad (7)$$

in cui si è posto

$$\underline{\underline{D}}_{ij}^{(\pi)} = \begin{pmatrix} S_{0ij}^D & Z_{0ij}^D \\ S_{1ij}^D & Z_{1ij}^D \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{L}}_{ij}^{(\pi)} = \begin{pmatrix} S_{0ij}^L & Z_{0ij}^L \\ S_{1ij}^L & Z_{1ij}^L \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{U}}_{ij}^{(\pi)} = \begin{pmatrix} S_{0ij}^U & Z_{0ij}^U \\ S_{1ij}^U & Z_{1ij}^U \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

$$\underline{x}_i^f = \begin{pmatrix} E_i^f \\ J_{s,i}^f \end{pmatrix} \ , \ \underline{x}_i^b = \begin{pmatrix} E_i^b \\ J_{s,i}^b \end{pmatrix} \quad . \qquad (9)$$

La (6) definisce le correnti "progressive", e mostra che il loro valore in un punto del profilo è dovuto al campo incidente ed ai contributi provenienti dai punti posti alla sinistra di quello considerato. La (7) si ottiene dalle (2-6) e mostra che il valore delle correnti "regressive" in un punto del profilo è dovuto ai contributi provenienti dai punti

posti alla destra di quello considerato. Le (6-7) possono essere risolte con il seguente algoritmo iterativo:

$$\left(\underline{\underline{D}}^{(p)} - \underline{\underline{L}}^{(p)}\right)\underline{x}^{f,(n)} = \underline{y} + \underline{\underline{L}}^{(p)}\underline{x}^{b,(n-1)}, \tag{10}$$

$$\left(\underline{\underline{D}}^{(p)} - \underline{\underline{U}}^{(p)}\right)\underline{x}^{b,(n)} = \underline{\underline{U}}^{(p)}\underline{x}^{f,(n)}, \tag{11}$$

con $\underline{x}^{b,(0)} = \underline{0}$. Poiché le matrici che compaiono nella (10) sono triangolari inferiori a blocchi 2x2, la (10) può essere risolta per sostituzione diretta:

$$\begin{aligned} \underline{x_1}^{f,(n)} &= \underline{\underline{A_{11}}}^{-1}\underline{y_1} \\ \underline{x_i}^{f,(n)} &= \underline{\underline{A_{ii}}}^{-1}\left(\underline{y_i} - \sum_{j=1}^{i-1}\underline{\underline{A_{ij}}}\left(\underline{x_j}^{f,(n)} + \underline{x_j}^{b,(n-1)}\right)\right) \qquad \text{con} \quad i = 2,3,\ldots,N \quad . \end{aligned} \tag{12}$$

La (12) richiede solo l'inversione di N matrici 2x2, ed il numero di moltiplicazioni complesse è asintoticamente proporzionale a N^2. Analogamente, la (11) può essere risolta per sostituzione inversa, perché in essa compaiono matrici triangolari superiori a blocchi. In definitiva, il metodo ha una complessità di calcolo dell'ordine di N^2.

3. ANALISI DELLA CONVERGENZA DEL METODO

3.1 Analisi teorica

Sostituendo la (11) nella (10) e tenendo conto della (5), dopo alcuni passaggi algebrici si può verificare che le (10-11) sono equivalenti a

$$\underline{x}^{(n)} = \underline{\underline{G}}\,\underline{x}^{(n-1)} + \underline{c} \quad , \tag{13}$$

dove

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\underline{A}} \tag{14}$$

$$\underline{c} = \underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{y} \tag{15}$$

e

$$\underline{\underline{Q}} = \left(\underline{\underline{D}}^{(p)} - \underline{\underline{L}}^{(p)}\right)\underline{\underline{D}}^{(p)^{-1}}\left(\underline{\underline{D}}^{(p)} - \underline{\underline{U}}^{(p)}\right) \quad . \tag{16}$$

L'aver posto le (10-11) in questa forma consente di affermare, sulla base di un noto teorema di algebra lineare, che condizione necessaria e sufficiente affinché il metodo MOMI sia convergente è che il raggio spettrale [6] della matrice $\underline{\underline{G}}$ definita dalle (14) e (16) sia minore di uno (ossia che tutti gli autovalori di $\underline{\underline{G}}$ abbiano modulo minore di uno). Inoltre, confrontando la (16) con l'analoga espressione valida per il metodo SSOR (*Symmetric Successive Over-Relaxations*) a blocchi [6], si riconosce che il metodo MOMI per superfici dielettriche è equivalente al metodo SSOR a blocchi. Questo risultato è l'estensione al caso dielettrico dell'analogo risultato ottenuto in [7] per superfici perfettamente conduttrici. In quel caso, il metodo MOMI risulta equivalente al metodo SSOR ordinario.

3.2 Interpretazione fisica

I risultati ottenuti nel sottoparagrafo precedente, per essendo interessanti dal punto di vista teorico, sono di scarsa utilità pratica, in quanto è molto difficile legare il raggio spettrale di $\underline{\underline{G}}$ alle caratteristiche della superficie diffondente. Risulta invece più utile l'interpretazione fisica delle (10-11). Non è infatti difficile riconoscere che le correnti valutate dopo il primo passo (n=1) tengono conto delle interazioni multiple di qualsiasi ordine, purché tali interazioni includano nessun cambio di verso da sinistra a destra e non più di un cambio di verso da destra a sinistra. Iterando il ragionamento, otteniamo che le correnti valutate dopo l'n-mo passo tengono conto delle interazioni multiple di

qualsiasi ordine, purché tali interazioni includano non più di $n-1$ cambi di verso da sinistra a destra e non più di n cambi di verso da destra a sinistra. Poiché per superfici non molto rugose la potenza diffusa non cambia verso molte volte, possiamo ragionevolmente aspettarci che il metodo MOMI sia rapidamente convergente, almeno per superfici non estremamente rugose. Per verificare tale previsione, sono stati effettuati alcuni esperimenti numerici.

3.3 Esperimenti numerici

L'algoritmo iterativo può essere fermato quando l'errore residuo relativo $r(n) = \left\| \underline{y} - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}^{(n)} \right\| / \left\| \underline{y} \right\|$ diventa minore di una soglia assegnata. Sono stati effettuati numerosi esperimenti, considerando profili superficiali gaussiani con funzione di autocorrelazione gaussiana e diversi valori della deviazione standard della quota σ e della sua lunghezza di correlazione L. Per ciascuna coppia di valori σ e L è stato valutato il numero minimo n_0 di iterazioni tale che $r(n_0)$ sia minore di 0.01. I risultati ottenuti sono riportati in Tabella 1, e mostrano che effettivamente la convergenza dell'algoritmo è molto rapida: 4 o 5 iterazioni sono spesso sufficienti a valutare il campo diffuso dalla superficie.

E' stato infine verificato (vedi ad esempio la Figura 2) che la sezione radar normalizzata (NRCS) valutata con il metodo MOMI è in ottimo accordo con quella valutata tramite il MdM risolto con una tecnica diretta (il metodo di eliminazione di Gauss).

5. CONCLUSIONI

Il metodo presentato consente di valutare il campo diffuso da una superficie dielettrica rugosa, nel caso di problemi bidimensionali. L'algoritmo iterativo è risultato molto rapidamente convergente, in accordo con quanto previsto sulla base dell'interpretazione fisica del metodo.

Riferimenti bibliografici

[1] D.Holliday, L.L.DeRaad, and G.C.St-Cyr, "Forward-backward: A new method for computing low-grazing angle scattering", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 44, pp. 722-729, May 1996.

[2] D.A.Kapp and G.S.Brown, "A new numerical method for rough surface scattering calculations", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 44, pp. 711-721, May 1996.

[3] D.Holliday, L.L.DeRaad, and G.C.St-Cyr, "Forward-backward method for scattering from imperfect conductors", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 46, pp. 101-107, Jan. 1998.

[4] H.T.Chou, J.T.Johnson,"A novel acceleration algorithm for the computation of scattering from rough surfaces with the Forward-Backward method", *Radio Sci.*, vol.33, pp.1277-1287, Sept.-Oct. 1998.

[5] A.Iodice, "Forward-Backward Method for Scattering from Dielectric Rough Surfaces", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, in press.

[6] D.M.Young, *Iterative Solution of Large Linear Systems*, New York: Academic Press, 1971.

[7] J.C.West and J.M.Sturm, "On Iterative Approaches For Electromagnetic Rough-Surface Scattering Problems", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.47, pp.1281-1288, Aug. 1999.

Tabella 1 : Numero minimo di iterazioni n_0 tale che $r(n_0) < 0.01$. Angolo di incidenza = 60°, $\varepsilon_r = 4$.

σ/λ σ/L	0.1 *vv -hh*	0.3 *vv -hh*	0.5 *vv -hh*	0.7 *vv -hh*	1.0 *vv -hh*	10.0 *vv -hh*
0.15	3 - 4	3 - 4	3 - 4	3 - 4	3 - 4	4 - 5
0.20	4 - 5	4 - 5	4 - 5	4 - 5	4 - 5	4 - 5
0.33	5 - 5	4 - 5	4 - 5	4 - 5	4 - 5	4 - 5
0.71	5 - 5	4 - 5	4 - 5	4 - 5	4 - 5	4 - 5
1.00	6 - 7	6 - 7	6 - 7	6 - 7	6 - 6	5 - 5

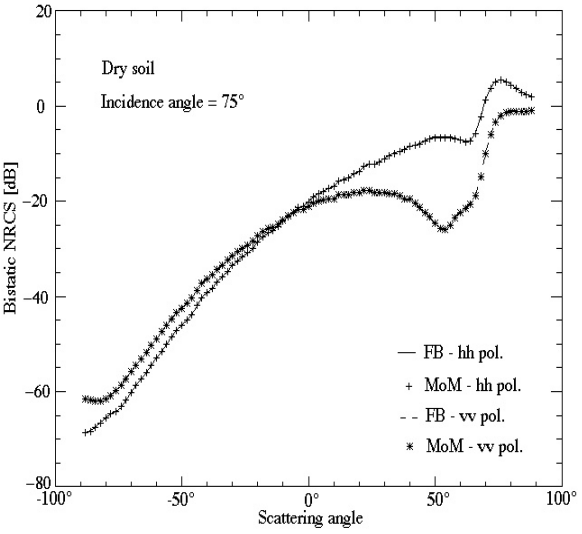


Figura 2: NRCS di una superficie rugosa ($\sigma=\lambda/6$, pendenza media = 13°, $\varepsilon_r = 4$), valutata con MOMI e MdM diretto.