

Distribuzioni o funzioni generalizzate nello studio di fenomeni fisici

Applicazione ai Campi Elettromagnetici

Gian Carlo Corazza

2010



Prefazione

Questo libretto ha innanzi tutto l'obiettivo di fornire una serie di suggerimenti a chi si accinge ad utilizzare, a fini applicativi, modelli matematici nello studio di fenomeni fisici (cap.1).

La attendibilità di quanto affermato nel primo capitolo viene successivamente messa alla prova da una sua applicazione ad un fenomeno fisico che si presta particolarmente bene a tal fine: i Campi elettromagnetici. Da questo punto in poi l'obiettivo del libro diviene quello di giungere ad una teoria dei Campi elettromagnetici che sia la più compatta e la più illuminante, per finalità applicative.

Il rigore e la generalità non sono quelle di un testo di matematica
perché si daranno per soddisfatte tutte le condizioni
richieste perché i passaggi che verranno fatti siano validi.

Alla fine (da cap.4 a cap.6) si perviene ad una del tutto nuova ed originale trattazione dei Campi elettromagnetici basata sull'uso delle distribuzioni o funzioni generalizzate, che dir si voglia, trattazione particolarmente utile perché permette di introdurre e visualizzare il teorema di equivalenza ed il teorema di induzione, cioè due importanti teoremi i cui enunciati erano già stati introdotti in precedenza, ma soltanto in modo intuitivo.

Nelle tre corpose Appendici che chiudono il libro
sono richiamate nozioni che è necessario possedere per una lettura approfondita del libro stesso,
ma in prima lettura esse possono essere date per note.



Capitolo 1

Modelli matematici e fenomeni fisici

1.1 Uso di modelli matematici nello studio di fenomeni fisici

La descrizione di un fenomeno fisico può sempre essere fatta per via sperimentale attraverso l'osservazione e la misura delle grandezze che lo caratterizzano.

In alternativa è talvolta possibile procedere per via teorica, formulando un problema matematico tale che i valori misurati delle grandezze fisiche interessanti siano approssimati in maniera soddisfacente dai valori, calcolati, di una soluzione del problema matematico.

Il più generale modello matematico che si può immaginare dovrebbe descrivere l'andamento del fenomeno fisico in tutto lo spazio, a partire da un istante iniziale nel quale dovrebbero essere noti tutti i valori delle grandezze in gioco, ma è evidente che un modello siffatto è, oltre che impossibile, anche inutile. Infatti l'interesse per qualsiasi fenomeno è sempre circoscritto ad intervalli di tempo limitati e a regioni di spazio V che non coincidono con tutto lo spazio V_∞ , $V \subset V_\infty$. ma anche perché i valori delle grandezze in gioco vengono misurati entro una fascia di tolleranza che dipende dal tipo di strumentazione usata e dal rumore proprio degli apparati di misura. Ne viene, di conseguenza, che il modello utilizzabile nello studio di un fenomeno fisico non è unico, dato che a tale modello si richiede soltanto di dare risultati che siano in accordo con i valori misurati, o misurabili, delle grandezze in gioco

- entro una fascia di tolleranza, che dipende dall'uso che si vuol fare dei valori calcolati e dalla fascia di incertezza dovuta agli errori di misura
- in una regione dello spazio
- in un intervallo di tempo.

La prima conseguenza di quanto ora affermato è che quando si opera in casi particolari conviene fare ricorso ad un modello matematico quanto più semplice possibile, modello che fra l'altro potrà utilizzare grandezze che non hanno rispondenza nella realtà fisica dato che quello che gli si richiede è soltanto un significativo accordo fra dati misurati e dati calcolati.

è questo un suggerimento che può essere associato ad una *catch phrase*, cioè a una frase che può essere considerata il primo comandamento in un decalogo da tener presente nello studio di fenomeni fisici con modelli matematici. La frase è:

Non lucidate la chiave: è sufficiente che apra!

Dato che nel seguito verranno introdotte correnti impresse (cioè correnti che non risentono di quanto le circonda), correnti superficiali, correnti lineari, cariche putiformi, correnti magnetiche, cioè grandezze inesistenti nella realtà fisica, il comandamento al secondo posto è:

A caval donato non si guarda in bocca

Al terzo posto, per ricordare che il modello deve essere adeguato alle difficoltà del problema fisico, si trova

Non metterti un pesante abito da cerimonia per un pic-nic in piena estate

In linea con il precedente è il quarto comandamento:

Non sparare alle mosche col cannone

Il comandamento che segue è un suggerimento per chi talvolta dimentica quale sia il vero obiettivo da raggiungere:

Non mangiare il menu

suggerimento che si accompagna con quello rivolto a chi fa estrapolazioni al di là del limite di validità:

Non sporgetevi dal finestrino

Gli ultimi tre comandamenti sono quelli ai quali ci si è in particolare attenuti nella redazione del presente libro.

Il primo è:

Non mettere in valigia quello che non ti serve

da intendere nel senso di fare le approssimazioni all'inizio della trattazione e non alla fine.

I due comandamenti successivi sono i due più importanti e tengono entrambi presente la possibilità di utilizzare più di un modello:

Evviva la poligamia

Non frustare un cavallo morto

In particolare quest'ultimo suggerimento, che è da interpretare nel senso di non arrampicarsi sugli specchi per raggiungere un risultato che è molto più agevole conseguire cambiando ... cavallo, ovvero modello, sta alla base dell'introduzione delle distribuzioni o funzioni generalizzate nello studio del campo elettromagnetico generato da cariche elettriche in movimento-

Capitolo 2

Campi elettromagnetici variabili nel tempo

2.1 Campi elettromagnetici variabili comunque nel tempo

La descrizione di un fenomeno fisico può sempre essere fatta per via sperimentale attraverso la misura delle grandezze che lo caratterizzano. In alternativa è talvolta possibile procedere per via teorica, ovvero formulare un problema matematico tale che i valori delle grandezze fisiche che interessano possano essere calcolati, entro la fascia di incertezza dovuta agli errori di misura, mediante una soluzione del problema matematico. Ovviamente il problema matematico di cui si è ora detto è suggerito da una analisi sperimentale del fenomeno fisico che interessa, tuttavia può anche basarsi su ipotesi che non hanno rispondenza nella realtà fisica, dato che l'unico obiettivo che con esso ci si pone è la coincidenza di una soluzione del problema matematico (in generale tale problema può avere più di una soluzione) con i valori misurati delle grandezze fisiche.

La teoria macroscopica dei fenomeni elettromagnetici che viene presentata nel seguito si basa su quattro postulati di cui i primi tre sono i seguenti:

1. la distribuzione nello spazio della carica elettrica (positiva o negativa) è caratterizzata da una funzione $\rho = \rho(P, t)$ finita, detta *densità di carica per unità di volume*; la carica totale $q = q(t)$ contenuta in un volume V è data quindi da

$$q(t) = \int_V \rho dV; \quad (2.1)$$

2. una carica q localizzata in un volume sufficientemente piccolo, comprendente un punto che si muove con velocità istantanea $\bar{u} = \bar{u}(P, t)$, è sollecitata da una forza (*forza di Lorentz*)

$$\bar{F}(P, t) = q(\bar{E} + \bar{u} \times \bar{B}), \quad (2.2)$$

essendo $\bar{E} = \bar{E}(P, t)$ l'*intensità di campo elettrico* e $\bar{B} = \bar{B}(P, t)$ l'*induzione magnetica* dovute alla totalità delle cariche presenti nello spazio; dato che il contributo ad \bar{E} , \bar{B} da parte di q tende a zero quando q ed il volume che la contiene tendono a zero, le funzioni \bar{E} , \bar{B} che compaiono nella (2.2) sono in tale ipotesi quelle dovute alle altre cariche presenti nello spazio e la (2.2) può essere usata per definire la \bar{E} e la \bar{B} ad esse imputabili. Se la distribuzione di carica di densità $\rho = \rho(P, t)$ si muove con velocità $\bar{u} = \bar{u}(P, t)$, la forza per unità di volume è data da

$$\bar{f}(P, t) = \rho(\bar{E} + \bar{u} \times \bar{B}); \quad (2.3)$$

3. la carica elettrica si conserva, ovvero in un sistema isolato la carica elettrica è costante. Per $V = V_\infty$ il valore di tale costante viene assunto uguale a zero, cioè la totalità delle cariche positive uguale al valore assoluto della totalità delle cariche negative; inoltre si fa l'ipotesi che per $t = -\infty$ il bilanciamento fra cariche positive e negative sia valido localmente: $\rho(P, -\infty) = 0$, $\forall P \in V_\infty$ (con una eccezione di cui si parla in seguito).

Prima di introdurre il quarto postulato conviene dare alcune definizioni. Il lavoro fatto dalle forze di Lorentz nel tempo dt ed in un volume V contenente una distribuzione di carica elettrica di densità ρ è dato, per la (2.3), da

$$dL = \int_V \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{u}} dV dt = \int_V \rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{E}} dV dt. \quad (2.4)$$

Posto ($\bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{J}}(P, t)$ densità di corrente elettrica)

$$\bar{\mathbf{J}}(P, t) = \rho \bar{\mathbf{u}}, \quad (2.5)$$

si ha anche

$$dL = \int_V \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}} dV dt. \quad (2.6)$$

Nel seguito si avrà a che fare con situazioni ove una parte di $\bar{\mathbf{J}}$, tutta al finito e nulla prima di un istante $t = \bar{t}$ con $|\bar{t}|$ finito, verrà considerata come un termine noto, indipendente dalle proprietà del mezzo che la circonda; si parlerà di essa come di una *densità di corrente impressa*,

$$\bar{\mathbf{J}}_i = \rho_i \bar{\mathbf{u}}, \quad (2.7)$$

sostenuta da forze di natura non elettrica o trattabili come tali (*forze impresse*).

L'ipotesi dell'esistenza di correnti impresse introduce una grandezza che *non* ha corrispondenza nel mondo fisico, dato che in quest'ultimo non si trova alcuna densità di corrente che sia indipendente da quanto la circonda. Sempre rimanendo nel modello matematico, si può allora supporre che per $t < \bar{t}$ le cariche che compaiono nelle $\bar{\mathbf{J}}_i$ siano ferme, nella regione in cui $\bar{\mathbf{J}}_i$ è diversa da zero per $t > \bar{t}$, e che le cariche di segno opposto, che fanno loro equilibrio in tutto V_∞ siano invece ferme all'infinito; in tal modo viene a cadere per le ρ_i interessate nelle $\bar{\mathbf{J}}_i$ l'ipotesi $\rho(P, -\infty) = 0$, $\forall P \in V_\infty$ (è questa l'eccezione di cui al punto 3). Il lavoro svolto dalle forze impresse è uguale a quello assorbito dalle forze di Lorentz agenti su ρ_i e quindi nel tempo dt e nel volume V esso vale

$$- \int_V \bar{\mathbf{J}}_i \cdot \bar{\mathbf{E}} dV dt. \quad (2.8)$$

L'andamento del fenomeno fisico richiede che il modello matematico che lo descrive sia tale che la totalità delle forze che sostengono le correnti impresse in tutto lo spazio V_∞ erogino sempre una potenza media positiva, cioè che sia sempre

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{T} \int_0^T \int_V \bar{\mathbf{J}}_i \cdot \bar{\mathbf{E}} dV dt \right] > 0; \quad (2.9)$$

tuttavia, è in generale possibile scrivere

$$\bar{\mathbf{J}}_i = \bar{\mathbf{J}}_i^s + \bar{\mathbf{J}}_i^u, \quad (2.10)$$

essendo $\bar{\mathbf{J}}_i^s$ una funzione vettoriale di punto, definita in V_∞ , associata con una potenza media positiva

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{T} \int_0^T \int_V \bar{\mathbf{J}}_i^s \cdot \bar{\mathbf{E}} dV dt \right] > 0, \quad (2.11)$$

che verrà detta *sorgente* e \bar{J}_i^u una funzione vettoriale di punto, definita in V_∞ , associata con una potenza media negativa o nulla

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{T} \int_0^T \int_V \bar{J}_i^u \cdot \bar{E} dV dt \right] \leq 0, \quad (2.12)$$

che verrà detta *utilizzatore*. La suddivisione di \bar{J}_i in \bar{J}_i^s e \bar{J}_i^u non è unica, dato che si impongono solo le disuguaglianze (2.11), (2.12); in particolare, per la (2.9), è possibile considerare la totalità delle \bar{J}_i una sorgente.

Il problema base che qui ci si propone di risolvere è quello di individuare le funzioni vettoriali \bar{E} , \bar{B} associate ad assegnate \bar{J}_i quando in V_∞ ha sede un mezzo di determinate proprietà, in modo tale che si possa calcolare il lavoro svolto dalle sorgenti e dagli utilizzatori nel tempo dt . A tal fine si introduce il quarto postulato:

4. sotto alcune ipotesi restrittive, le funzioni \bar{E} , \bar{B} sono ottenibili a partire da una delle soluzioni di un sistema di *equazioni differenziali*, detto *di Maxwell*, che si passa a considerare.

2.2 Equazioni di Maxwell

Introdotte tre nuove funzioni vettoriali: $\bar{H} = \bar{H}(P, t)$ *intensità di campo magnetico*, $\bar{D} = \bar{D}(P, t)$ *induzione elettrica*, $\bar{J}_c = \bar{J}_c(P, t)$ *densità di corrente elettrica non impressa*, le *equazioni di Maxwell* si scrivono

$$\text{rot } \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{J}_c + \bar{J}_i, \quad (2.13)$$

$$\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (2.14)$$

$P \in V_\infty, \forall t > 0,$

relazioni che sono indipendenti dal mezzo presente in V_∞ . Di tale mezzo si tiene conto mediante le *relazioni materiali*

$$\bar{D} = \bar{D}(\bar{E}, \bar{H}), \quad (2.15)$$

$$\bar{B} = \bar{B}(\bar{E}, \bar{H}), \quad (2.16)$$

$$\bar{J}_c = \bar{J}_c(\bar{E}, \bar{H}), \quad (2.17)$$

$P \in V_\infty, t > 0,$

relazioni che devono essere definite, di volta in volta, in funzione del mezzo interessato dal fenomeno elettromagnetico. Le ipotesi restrittive cui si è fatto cenno nel formulare in 2.1 il postulato numero 4, ipotesi che si ritengono valide in questo capitolo e nel successivo, sono che i dati del problema, e cioè le \bar{J}_i e le relazioni materiali, siano tali che:

1. le funzioni vettoriali \bar{E} , \bar{H} , che compaiono nelle (2.13) (2.14) ammettano rotore dappertutto in V_∞ ;
2. le \bar{E} , \bar{H} , \bar{D} , \bar{B} , \bar{J}_c ammettano divergenza dappertutto in V_∞ e siano derivabili rispetto al tempo in qualsiasi istante t .

Nella (2.13) \bar{J}_c è la densità di corrente elettrica dovuta al movimento di cariche libere del mezzo, mentre $(\partial \bar{D}) \setminus (\partial t)$ è la *densità di corrente elettrica di spostamento*; nella (2.14) $(\partial \bar{B}) \setminus (\partial t)$ è la *densità*

di corrente magnetica di spostamento. Quando il mezzo è conduttore \bar{J}_c assume la denominazione di densità di corrente elettrica di conduzione. Il mezzo si dice *lineare, anisotropo* se si può scrivere

$$\bar{D} = \bar{\varepsilon} \cdot \bar{E}, \quad (2.18)$$

$$\bar{B} = \bar{\mu} \cdot \bar{H}, \quad (2.19)$$

$$\bar{J}_c = \bar{\gamma} \cdot \bar{E}, \quad (2.20)$$

con $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\gamma}$ diadici indipendenti dal modulo di \bar{E} , $|\bar{E}|$, e da quello di \bar{H} , $|\bar{H}|$, che nel sistema di coordinate curvilinee ortogonali di vettori unitari $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3$ al quale si conviene qui di riferire le funzioni vettoriali $\bar{E}, \bar{H}, \bar{D}, \bar{B}, \bar{J}_c$ si scrivono

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} = & \varepsilon_{11}\hat{i}_1\hat{i}_1 + \varepsilon_{12}\hat{i}_1\hat{i}_2 + \varepsilon_{13}\hat{i}_1\hat{i}_3 + \\ & + \varepsilon_{21}\hat{i}_2\hat{i}_1 + \varepsilon_{22}\hat{i}_2\hat{i}_2 + \varepsilon_{23}\hat{i}_2\hat{i}_3 + \\ & + \varepsilon_{31}\hat{i}_3\hat{i}_1 + \varepsilon_{32}\hat{i}_3\hat{i}_2 + \varepsilon_{33}\hat{i}_3\hat{i}_3 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu} = & \mu_{11}\hat{i}_1\hat{i}_1 + \mu_{12}\hat{i}_1\hat{i}_2 + \mu_{13}\hat{i}_1\hat{i}_3 + \\ & + \mu_{21}\hat{i}_2\hat{i}_1 + \mu_{22}\hat{i}_2\hat{i}_2 + \mu_{23}\hat{i}_2\hat{i}_3 + \\ & + \mu_{31}\hat{i}_3\hat{i}_1 + \mu_{32}\hat{i}_3\hat{i}_2 + \mu_{33}\hat{i}_3\hat{i}_3 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} = & \gamma_{11}\hat{i}_1\hat{i}_1 + \gamma_{12}\hat{i}_1\hat{i}_2 + \gamma_{13}\hat{i}_1\hat{i}_3 + \\ & + \gamma_{21}\hat{i}_2\hat{i}_1 + \gamma_{22}\hat{i}_2\hat{i}_2 + \gamma_{23}\hat{i}_2\hat{i}_3 + \\ & + \gamma_{31}\hat{i}_3\hat{i}_1 + \gamma_{32}\hat{i}_3\hat{i}_2 + \gamma_{33}\hat{i}_3\hat{i}_3, \end{aligned} \quad (2.23)$$

con $\varepsilon_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ij}$ indipendenti da $|\bar{E}|, |\bar{H}|$. In taluni casi particolari uno o più dei tre diadici $\bar{\varepsilon}, \bar{\mu}, \bar{\gamma}$ è dato dal prodotto di uno scalare per il diadico unità; se tutti e tre i diadici che compaiono nelle (2.18) (2.19) (2.20) sono di tale tipo, cioè se si può scrivere (si tenga presente che è $\bar{I} \cdot \bar{E} = \bar{E}$, $\bar{I} \cdot \bar{H} = \bar{H}$ se \bar{I} è il diadico unità)

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}, \quad (2.24)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H}, \quad (2.25)$$

$$\bar{J}_c = \gamma \bar{E}, \quad (2.26)$$

con ε, μ, γ indipendenti dal modulo di \bar{E} , $|\bar{E}|$, e da quello di \bar{H} , $|\bar{H}|$, il mezzo si dice *lineare, isotropo*. Il mezzo si dice *omogeneo* se $\bar{\varepsilon}, \bar{\mu}, \bar{\gamma} \circ \varepsilon, \mu, \gamma$ sono indipendenti dal punto considerato. Il mezzo viene detto *invariante nel tempo* se $\bar{\varepsilon}, \bar{\mu}, \bar{\gamma} \circ \varepsilon, \mu, \gamma$ sono indipendenti dall'istante considerato. Un mezzo lineare, isotropo, invariante nel tempo si dice *normale*.

Nel seguito, salvo avviso in contrario, si supporrà che il mezzo nella regione V che interessa sia normale, per cui, essendo valide le (2.24), (2.25), (2.26), le (2.13), (2.14) si scrivono

$$rot \bar{H} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \gamma \bar{E} + \bar{J}_i, \quad (2.27)$$

$$rot \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \quad (2.28)$$

$$P \in V_\infty, t > 0.$$

Si noti che per la linearità delle (2.27) (2.28) si può affermare che per esse vale il *principio di sovrapposizione degli effetti*. Prendendo la divergenza di ambo i membri della (2.27) si ha

$$\begin{aligned} div rot \bar{H} &= div \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \gamma \bar{E} + \bar{J}_i \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} div (\varepsilon \bar{E}) + div (\gamma \bar{E} + \bar{J}_i) = 0; \end{aligned} \quad (2.29)$$

d'altra parte il principio di conservazione della carica permette di scrivere l'*equazione di continuità*

$$\operatorname{div}(\gamma\bar{E} + \bar{J}_i) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad (2.30)$$

così che la (2.29) si può porre nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{div}(\varepsilon\bar{E}) - \rho] = 0. \quad (2.31)$$

Per la (2.29) la quantità $[\operatorname{div}(\varepsilon\bar{E}) - \rho]$ è costante nel tempo; poichè essa è stata sicuramente nulla in assenza della sorgente (che per ipotesi ha funzionato soltanto da $\bar{t} = 0$ in avanti), tale costante è uguale a zero e, di conseguenza, si ha

$$\operatorname{div}\bar{D} = \operatorname{div}(\varepsilon\bar{E}) = \rho. \quad (2.32)$$

Per un mezzo omogeneo la (2.32) si scrive

$$\operatorname{div}\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (2.33)$$

Analogamente dalla (2.28) si ricava

$$\operatorname{div}\bar{B} = \operatorname{div}(\mu\bar{H}) = 0 \quad (2.34)$$

e, per un mezzo omogeneo,

$$\operatorname{div}\bar{H} = 0. \quad (2.35)$$

Prima di terminare, si può osservare che la (2.27) permette di ricavare senza difficoltà \bar{J}_i dalla conoscenza di \bar{E} , \bar{H} e di ε , γ . Ciò significa che \bar{J}_i può essere considerato come una incognita, anziché un termine noto, determinabile in funzione del campo elettromagnetico nella regione in cui essa è localizzata.

2.3 Equazioni di Maxwell nel vuoto

Le (2.27), (2.28) contengono come caso particolare quello del mezzo *vuoto*; in esso si ha

$$\operatorname{rot}\bar{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial\bar{E}}{\partial t} + \bar{J}_i, \quad (2.36)$$

$$\operatorname{rot}\bar{E} = -\mu_0 \frac{\partial\bar{H}}{\partial t}, \quad (2.37)$$

$$P \in V_\infty, t > 0,$$

con ε_0 *permittività* e μ_0 *permeabilità* del vuoto date, nel sistema di misura *m.k.s.*, da (H =Henry, F =Farad)

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \left[\frac{F}{m} \right], \quad (2.38)$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \left[\frac{H}{m} \right]. \quad (2.39)$$

Il caso del mezzo vuoto è molto importante perché in prima approssimazione ad esso si può ricondurre il caso dell'aria ed inoltre perché, in linea di principio, qualunque mezzo può essere sostituito dal vuoto se si introducono opportune correnti impresse (si veda 3.5).

2.4 Equazione delle onde

Nei punti di un mezzo *omogeneo* in cui non vi sono correnti impresse le equazioni di Maxwell si scrivono

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \gamma \bar{E}, \quad (2.40)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}. \quad (2.41)$$

Eseguendo il rotore della prima si ha

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \bar{E} + \gamma \operatorname{rot} \bar{E}, \quad (2.42)$$

cosicché utilizzando la (2.41) e tenendo presente che $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{H}$ è, per definizione, uguale a $\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{H} - \nabla^2 \bar{H}$, ovvero a $-\nabla^2 \bar{H}$ per la (2.35), si ottiene

$$\nabla^2 \bar{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} - \mu \gamma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = 0. \quad (2.43)$$

In un mezzo senza perdite ($\gamma = 0$) la (2.43) si scrive

$$\nabla^2 \bar{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.44)$$

Analogamente si dimostra che per $\gamma = 0$ deve essere

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.45)$$

Le (2.44) (2.45) ammettono una soluzione non banale ($\bar{E} \neq 0$, $\bar{H} \neq 0$) soltanto se in qualche regione di V_∞ sono localizzate sorgenti di campo elettromagnetico; pertanto tali equazioni possono essere valide solo in regioni $V \subset V_\infty$. Le equazioni (2.44) (2.45) sono del tipo detto *equazione vettoriale delle onde* ed in coordinate cartesiane la componente generica u del vettore \bar{E} o del vettore \bar{H} soddisfa alla

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.46)$$

che viene detta *equazione delle onde*, con

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad (\sqrt{\mu \varepsilon} > 0), \quad (2.47)$$

velocità della luce nel mezzo considerato.

Ogni soluzione dell'è una funzione d'onda, o, semplicemente, un'onda; per tale motivo sovente si parla di onde elettromagnetiche anziché di campi elettromagnetici. Si deve notare che quanto sopra permette di affermare che le intensità di campo elettromagnetico, \bar{E} ed \bar{H} , sono soluzioni delle (2.44) (2.45), ma non viceversa; infatti una coppia qualsiasi di soluzioni delle (2.44) (2.45) non soddisfa, in generale, alle equazioni di Maxwell, perchè possono essere il campo elettrico ed il campo magnetico sostenuti da differenti sorgenti, collocate in $V_\infty \setminus V$.

2.5 Teorema di Poynting

Per quanto si è detto in 2.1, la potenza istantanea relativa alle forze esterne che sostengono le correnti impresse in un volume V è data da

$$- \int_V \bar{J}_i \cdot \bar{E} dV. \quad (2.48)$$

Tale potenza viene spesa per dar origine al campo elettromagnetico, e può essere espressa in funzione di esso, come si passa a dimostrare. Si moltiplichino scalarmente la (2.27) per \overline{E} e la (2.28) per \overline{H} ; sottraendo membro a membro si ottiene

$$\begin{aligned}\overline{E} \cdot \text{rot } \overline{H} - \overline{H} \cdot \text{rot } \overline{E} &= \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \cdot \overline{E} + \mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} \cdot \overline{H} + \\ &+ \gamma \overline{E} \cdot \overline{E} + \overline{J}_i \cdot \overline{E}.\end{aligned}\quad (2.49)$$

Quest'ultima, peraltro, si può scrivere

$$\begin{aligned}-\text{div} (\overline{E} \times \overline{H}) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \overline{E} \cdot \overline{E} + \frac{1}{2} \mu \overline{H} \cdot \overline{H} \right) + \\ &+ \gamma \overline{E} \cdot \overline{E} + \overline{J}_i \cdot \overline{E},\end{aligned}\quad (2.50)$$

per cui integrando su di un volume V , racchiuso da una superficie regolare S , e riordinando i termini si ha

$$\begin{aligned}- \int_V \overline{J}_i \cdot \overline{E} dV &= \int_V \text{div} (\overline{E} \times \overline{H}) dV + \\ &+ \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \overline{E} \cdot \overline{E} + \frac{1}{2} \mu \overline{H} \cdot \overline{H} \right) dV + \int_V \gamma \overline{E} \cdot \overline{E} dV.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Applicando il teorema di Gauss al primo termine del secondo membro e scambiando tra loro i simboli di integrale e di derivata rispetto al tempo (il che è lecito in quanto V è fisso), si ottiene

$$\begin{aligned}- \int_V \overline{J}_i \cdot \overline{E} dV &= \int_S (\overline{E} \times \overline{H}) \cdot \hat{n} dS + \\ &+ \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \overline{E} \cdot \overline{E} + \frac{1}{2} \mu \overline{H} \cdot \overline{H} \right) dV + \int_V \gamma \overline{E} \cdot \overline{E} dV,\end{aligned}\quad (2.52)$$

in cui \hat{n} è un versore normale ad S orientato verso l'esterno. La formula (2.52) è nota come *teorema di Poynting*. Come si è detto, il primo membro rappresenta la potenza istantanea erogata dalle forze che sostengono la densità di corrente impressa \overline{J}_i ; tale potenza si ritrova come somma delle tre potenze che compaiono al secondo membro. Esse sono: la potenza dissipata in calore in V , $\int_V \gamma \overline{E} \cdot \overline{E} dV$; la variazione nell'unità di tempo dell'energia immagazzinata sotto forma elettrica e magnetica nel volume V , $\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \overline{E} \cdot \overline{E} + \frac{1}{2} \mu \overline{H} \cdot \overline{H} \right) dV$, ed infine la potenza che attraversa la superficie S , $\int_S (\overline{E} \times \overline{H}) \cdot \hat{n} dS$. Si consideri ora un volume V_1 che contiene V , delimitato da una superficie regolare S_1 (fig.??). La (2.52) si scrive allora

$$\begin{aligned}- \int_{V_1} \overline{J}_i \cdot \overline{E} dV &= \int_{S_1} (\overline{E} \times \overline{H}) \cdot \hat{n}_1 dS + \\ &+ \frac{d}{dt} \int_{V_1} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \overline{E} \cdot \overline{E} + \frac{1}{2} \mu \overline{H} \cdot \overline{H} \right) dV + \int_{V_1} \gamma \overline{E} \cdot \overline{E} dV,\end{aligned}\quad (2.53)$$

Sottraendo la (2.53) dalla (2.52) si ha

$$\begin{aligned}&\int_S (\overline{E} \times \overline{H}) \cdot \hat{n} dS - \int_{S_1} (\overline{E} \times \overline{H}) \cdot \hat{n}_1 dS = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{V_1 \setminus V} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \overline{E} \cdot \overline{E} + \frac{1}{2} \mu \overline{H} \cdot \overline{H} \right) dV + \\ &+ \int_{V_1 \setminus V} \gamma \overline{E} \cdot \overline{E} dV + \int_{V_1 \setminus V} \overline{J}_i \cdot \overline{E} dV.\end{aligned}\quad (2.54)$$

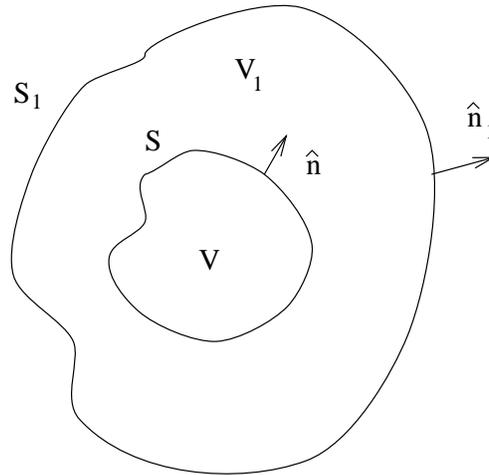


Figura 2.1: Significato fisico del flusso del vettore di Poynting.

Dato che le correnti impresse sono tutte al finito ed hanno incominciato a funzionare in un tempo finito, si può sempre scegliere S_1 in modo tale che nei suoi punti si abbia $\vec{E} = \vec{H} = 0$ (basta infatti che i punti di S_1 siano sufficientemente distanti dalle sorgenti perchè, per il postulato fondamentale della relatività, essi appartengano alla regione illimitata nella quale non è ancora arrivata energia elettromagnetica nell'istante considerato); in tal caso l'integrale esteso ad S_1 è nullo e la (2.54) permette di dare un significato fisico al flusso uscente attraverso S del vettore $\vec{E} \times \vec{H}$ (*vettore di Poynting*): esso rappresenta la somma della variazione nell'unità di tempo dell'energia elettromagnetica immagazzinata nel volume esterno alla superficie S , della potenza dissipata in calore e della potenza assorbita dalle sorgenti (negativa) e/o dagli utilizzatori localizzati nello stesso volume. Da quanto si è detto discende:

1. il significato fisico di potenza istantanea è proprio del flusso del vettore di Poynting e non del vettore stesso;
2. la superficie S deve essere chiusa (in alcuni casi si parla di flusso attraverso una superficie aperta in quanto esiste un'altra superficie aperta che chiude quella data, attraverso la quale il flusso è nullo);

3. l'energia elettrica di densità $\frac{1}{2}\varepsilon\bar{E} \cdot \bar{E}$ e l'energia magnetica di densità $\frac{1}{2}\mu\bar{H} \cdot \bar{H}$ sono intimamente connesse per i fenomeni variabili nel tempo e quindi non possono essere considerate separatamente.

Se tutte le correnti impresse sono localizzate all'esterno di V , la (2.52) si scrive

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S (\bar{E} \times \bar{H}) \cdot \hat{n} dS + \\ &+ \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon\bar{E} \cdot \bar{E} + \frac{1}{2}\mu\bar{H} \cdot \bar{H} \right) dV + \int_V \gamma\bar{E} \cdot \bar{E} dV, \end{aligned} \quad (2.55)$$

ovvero

$$\begin{aligned} &- \int_S (\bar{E} \times \bar{H}) \cdot \hat{n} dS = \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon\bar{E} \cdot \bar{E} + \frac{1}{2}\mu\bar{H} \cdot \bar{H} \right) dV + \int_V \gamma\bar{E} \cdot \bar{E} dV. \end{aligned} \quad (2.56)$$

In questo caso il flusso entrante del vettore di Poynting è uguale alla somma della variazione nell'unità di tempo dell'energia elettromagnetica immagazzinata nel volume interno alla superficie S e della potenza dissipata in calore nello stesso volume.

2.6 Teorema di unicità in una regione limitata

Si consideri un volume V , limitato da una superficie S , e si supponga di conoscere un campo elettromagnetico di intensità \bar{E} , \bar{H} nei punti di V . Dalla (2.27) è possibile ricavare in modo univoco la densità \bar{J}_i delle correnti elettriche impresse che sostengono il campo stesso, localizzate all'interno di S . Al contrario, se è data \bar{J}_i in tutti i punti di V da un istante $t = 0$ in poi, esiste più di un campo che soddisfa alle (2.27), (2.28) nei punti di V , dato che non sono determinate le sorgenti localizzate al di fuori di V . Se si vuole rendere biunivoca la corrispondenza tra \bar{J}_i ed \bar{E} , \bar{H} nei punti di V , alle (2.27), (2.28) è necessario aggiungere delle condizioni che prendono il nome di *condizioni ai limiti*. Esse sono:

1. i valori all'istante iniziale ($t = 0$) di \bar{E} e di \bar{H} in tutto V (*condizioni iniziali*);
2. il valore del vettore componente $\bar{E}_t = \hat{n} \times \bar{E} \times \hat{n}$ di \bar{E} oppure quello del vettore componente $\bar{H}_t = \hat{n} \times \bar{H} \times \hat{n}$ di \bar{H} , tangente alla superficie S in tutti i punti di quest'ultima, per $t > 0$ (*condizioni al contorno*).

La dimostrazione procede per assurdo. Si supponga che esistano due campi \bar{E} , \bar{H} ed \bar{E}' , \bar{H}' tali che in V sia

$$\text{rot } \bar{H} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \gamma \bar{E} + \bar{J}_i, \quad (2.57)$$

$$\text{rot } \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \quad (2.58)$$

$$\text{rot } \bar{H}' = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}'}{\partial t} + \gamma \bar{E}' + \bar{J}_i, \quad (2.59)$$

$$\text{rot } \bar{E}' = -\mu \frac{\partial \bar{H}'}{\partial t} \quad (2.60)$$

ed inoltre che si abbia

1. $\bar{E} = \bar{E}'$; $\bar{H} = \bar{H}'$ per $t = 0$ nei punti di V ;
2. $\bar{E}_t = \hat{n} \times \bar{E} \times \hat{n} = \bar{E}'_t = \hat{n} \times \bar{E}' \times \hat{n}$ nei punti di S per $t > 0$.

Sottraendo la (2.59) dalla (2.57) e la (2.60) dalla (2.58), si ottiene

$$\operatorname{rot}(\bar{H} - \bar{H}') = \varepsilon \frac{\partial(\bar{E} - \bar{E}')}{\partial t} + \gamma(\bar{E} - \bar{E}'), \quad (2.61)$$

$$\operatorname{rot}(\bar{E} - \bar{E}') = -\mu \frac{\partial(\bar{H} - \bar{H}')}{\partial t}. \quad (2.62)$$

Posto $\bar{e} = \bar{E} - \bar{E}'$; $\bar{h} = \bar{H} - \bar{H}'$, le (2.61) (2.62) si scrivono anche

$$\operatorname{rot} \bar{h} = \varepsilon \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \gamma \bar{e}, \quad (2.63)$$

$$\operatorname{rot} \bar{e} = -\mu \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}, \quad (2.64)$$

cioè \bar{e} ed \bar{h} sono una soluzione delle equazioni di Maxwell omogenee. Applicando a tale soluzione il teorema di Poynting (2.52) con $\bar{J}_i = 0$ si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S (\bar{e} \times \bar{h}) \cdot \hat{n} dS + \\ &+ \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \bar{e} \cdot \bar{e} + \frac{1}{2} \mu \bar{h} \cdot \bar{h} \right) dV + \int_V \gamma \bar{e} \cdot \bar{e} dV. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Poiché si ha $\bar{e} = \bar{e}_t + e_n \hat{n}$ ed $\bar{h} = \bar{h}_t + h_n \hat{n}$, si ha anche $\bar{e} \times \bar{h} \cdot \hat{n} = \bar{e}_t \times \bar{h}_t \cdot \hat{n}$, ma, per l'ipotesi 2 è $\bar{e}_t = \bar{E}_t - \bar{E}'_t = 0$ e quindi $(\bar{e} \times \bar{h}) \cdot \hat{n} = 0$ in tutti i punti della superficie S . Pertanto

$$\int_S (\bar{e} \times \bar{h}) \cdot \hat{n} dS = 0, \quad (2.66)$$

e dalla (2.65) risulta

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \bar{e} \cdot \bar{e} + \frac{1}{2} \mu \bar{h} \cdot \bar{h} \right) dV = - \int_V \gamma \bar{e} \cdot \bar{e} dV. \quad (2.67)$$

Integrando quest'ultima da $t = 0$ a t e tenendo conto della condizione 1, si ottiene

$$\int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \bar{e} \cdot \bar{e} + \frac{1}{2} \mu \bar{h} \cdot \bar{h} \right) dV = - \int_0^t \int_V \gamma \bar{e} \cdot \bar{e} dV dt, \quad (2.68)$$

con l'integrale a primo membro valutato nell'istante t . Nella (2.68) il primo membro è positivo o nullo, il secondo è negativo o nullo, quindi l'eguaglianza è possibile solo nel caso in cui essi siano entrambi nulli, ovvero

$$\bar{e} = \bar{h} = 0. \quad (2.69)$$

Quest'ultima relazione dimostra che i campi \bar{E} , \bar{H} ed \bar{E}' , \bar{H}' sono coincidenti in ogni punto di V e in ogni istante t e quindi che il campo elettromagnetico è univocamente determinato dalla \bar{J}_i e dalle condizioni ai limiti. La dimostrazione rimane sostanzialmente invariata se, anziché fissare \bar{E}_t , si fissa \bar{H}_t nei punti di S , oppure se si suddivide la superficie S in due superficie S_1 ed S_2 e si fissano \bar{E}_t nei punti di S_1 ed \bar{H}_t nei punti di S_2 . Si può infine osservare che le condizioni al contorno si riducono a $\hat{n} \times \bar{H} \times \hat{n} = \hat{n} \times \bar{E} \times \hat{n} = 0$ se i punti della superficie S vengono fatti tendere tutti all'infinito, dato che si è supposto che tutte le sorgenti stiano al finito e pure finita è la velocità di propagazione dell'energia, per il già citato postulato fondamentale della relatività.

Capitolo 3

Campi elettromagnetici variabili sinusoidalmente nel tempo

3.1 Equazioni di Maxwell per i vettori complessi

Se si suppone che tutte le grandezze dipendenti dal tempo in un fenomeno elettromagnetico varino sinusoidalmente con esso, per quanto viene detto in Appendice C si può scrivere

$$\bar{J}_{i\sim} = \frac{\bar{J}_i e^{j\omega t} + \bar{J}_i^* e^{-j\omega t}}{2}, \quad (3.1)$$

$$\rho_{\sim} = \frac{\rho e^{j\omega t} + \rho^* e^{-j\omega t}}{2}, \quad (3.2)$$

$$\bar{E}_{\sim} = \frac{\bar{E} e^{j\omega t} + \bar{E}^* e^{-j\omega t}}{2}, \quad (3.3)$$

$$\bar{H}_{\sim} = \frac{\bar{H} e^{j\omega t} + \bar{H}^* e^{-j\omega t}}{2}. \quad (3.4)$$

Introducendo le (3.1), (3.3), (3.4) nella (2.27) si ha

$$\begin{aligned} \text{rot} \left[\frac{1}{2} (\bar{H} e^{j\omega t} + \bar{H}^* e^{-j\omega t}) \right] &= j\omega\varepsilon \left[\frac{1}{2} (\bar{E} e^{j\omega t} - \bar{E}^* e^{-j\omega t}) \right] + \\ &+ \gamma \left[\frac{1}{2} (\bar{E} e^{j\omega t} + \bar{E}^* e^{-j\omega t}) \right] + \frac{1}{2} (\bar{J} e^{j\omega t} + \bar{J}^* e^{-j\omega t}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Tale relazione deve valere per tutti gli istanti t e quindi anche per l'istante $t_1 = t + \frac{\pi}{2\omega}$ nel quale, essendo

$$e^{j\omega t_1} = e^{j\omega(t + \frac{\pi}{2\omega})} = j e^{j\omega t}, \quad (3.6)$$

$$e^{-j\omega t_1} = e^{-j\omega(t + \frac{\pi}{2\omega})} = -j e^{-j\omega t}, \quad (3.7)$$

essa si scrive

$$\begin{aligned} \text{rot} \left[\frac{1}{2} (j\bar{H} e^{j\omega t} - j\bar{H}^* e^{-j\omega t}) \right] &= j\omega\varepsilon \left[\frac{1}{2} (j\bar{E} e^{j\omega t} + j\bar{E}^* e^{-j\omega t}) \right] + \\ &+ \gamma \left[\frac{1}{2} (j\bar{E} e^{j\omega t} - j\bar{E}^* e^{-j\omega t}) \right] + \frac{1}{2} (j\bar{J} e^{j\omega t} - j\bar{J}^* e^{-j\omega t}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Moltiplicando la (3.8) per $-j$, sommando alla (3.5) la relazione così ottenuta e moltiplicando tutti i termini per $e^{-j\omega t}$ si perviene alla equazione

$$\operatorname{rot} \bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} + \gamma\bar{E} + \bar{J}_i, \quad (3.9)$$

nella quale \bar{J}_i è una funzione che per ipotesi, ammette divergenza in tutto V_∞ . Analogamente dalla (2.28) si ottiene

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H}. \quad (3.10)$$

Le (3.9) (3.10) devono essere soddisfatte dai vettori complessi \bar{E} ed \bar{H} e possono quindi essere utilizzate nella ricerca di tali vettori, dai quali si ricavano quelli reali mediante le relazioni (3.3) (3.4), che si possono anche scrivere

$$\bar{E}_\sim = \mathcal{R}e [\bar{E} e^{j\omega t}], \quad (3.11)$$

$$\bar{H}_\sim = \mathcal{R}e [\bar{H} e^{j\omega t}]. \quad (3.12)$$

Ponendo

$$\varepsilon_c = \varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \quad (3.13)$$

la (3.9) assume la forma

$$\operatorname{rot} \bar{H} = j\omega\varepsilon_c\bar{E} + \bar{J}_i, \quad (3.14)$$

cioè l'equazione è formalmente identica nei due casi di mezzo con perdite ($\gamma \neq 0$) e senza perdite ($\gamma = 0$). Le (3.10) (3.14) sono note come equazioni di Maxwell per i vettori complessi. Nel seguito si scriverà ε anzichè ε_c ogni volta che non sarà necessario mettere in evidenza la presenza di perdite nel mezzo.

Prendendo la divergenza di entrambi i membri della (3.10) si deduce che è

$$\operatorname{div} (\mu\bar{H}) = 0, \quad (3.15)$$

da cui discende

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0 \quad (3.16)$$

se il mezzo è omogeneo. Dalla divergenza dei due membri della (3.14) si ha

$$\operatorname{div} (j\omega\varepsilon_c\bar{E}) = j\omega \operatorname{div} (\varepsilon\bar{E}) + \operatorname{div} (\gamma\bar{E}) = -\operatorname{div} \bar{J}_i. \quad (3.17)$$

Peraltro, senza difficoltà si verifica che all'equazione di continuità (2.30) corrisponde, per le grandezze complesse, l'equazione

$$\operatorname{div} (\gamma\bar{E} + \bar{J}_i) = -j\omega\rho \quad (3.18)$$

per cui dalla (3.17) discende

$$\operatorname{div} (\varepsilon\bar{E}) = \rho. \quad (3.19)$$

In mezzo omogeneo quest'ultima si scrive anche

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (3.20)$$

per cui, essendo in tal caso $\operatorname{div}(j\omega\varepsilon_c\bar{E}) = j\omega\varepsilon_c \operatorname{div} \bar{E}$, dalla (3.17) segue

$$\frac{\operatorname{div} \bar{J}_i}{j\omega\varepsilon_c} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (3.21)$$

Dalla relazione ora scritta si deduce che in regime sinusoidale ed in mezzo omogeneo la densità di carica ρ , nei punti in cui è nulla la divergenza della densità di corrente elettrica impressa \bar{J}_i , è uguale a zero; in tali punti \bar{E} ha divergenza nulla

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0. \quad (3.22)$$

3.2 Equazioni di Helmholtz

Analogamente a quanto si è fatto in 2.4, dalle (3.10) (3.14) si può dedurre che in una regione omogenea, priva di sorgenti, i vettori complessi \bar{E} , \bar{H} soddisfano alle equazioni

$$\nabla^2 \bar{E} - \sigma^2 \bar{E} = 0, \quad (3.23)$$

$$\nabla^2 \bar{H} - \sigma^2 \bar{H} = 0, \quad (3.24)$$

con

$$\sigma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon_c, \quad (3.25)$$

equazioni che corrispondono alle (2.45) (2.44) valide per i vettori istantanei.

Un'equazione del tipo della (3.23) o (3.24) viene detta *equazione vettoriale di Helmholtz* omogenea; le componenti cartesiane di un vettore che soddisfa all'equazione vettoriale di Helmholtz soddisfano all'equazione di Helmholtz omogenea

$$\nabla^2 u - \sigma^2 u = 0. \quad (3.26)$$

Nel seguito si avrà occasione di considerare anche equazioni di Helmholtz non omogenee. Anche in questo caso, come in 2.4, si deve osservare che associando una funzione soluzione della (3.23) con una qualsiasi delle infinite funzioni che soddisfano alla (3.24) non si ottiene, in generale, un campo elettromagnetico, cioè la coppia costituita dalle suddette funzioni non è, in generale, una soluzione delle equazioni di Maxwell (3.10) (3.14); infatti ad una determinata soluzione a divergenza nulla della (3.23) ne corrisponde una ed una sola della (3.24), ottenibile mediante la (3.10) dalla soluzione della (3.23).

La radice di σ^2 , che è rappresentata nel piano di Gauss da un vettore situato nel primo quadrante ¹

$$\sigma = \alpha + j\beta \quad (3.27)$$

viene detta *costante di propagazione intrinseca del mezzo*. In caso di conducibilità nulla ($\gamma = 0$ e quindi $\epsilon_c = \epsilon$) si ha

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}, \quad (3.28)$$

con $\sqrt{\mu \epsilon} > 0$; posto

$$\lambda f = c \quad (3.29)$$

(λ lunghezza d'onda, $f = \omega/(2\pi)$ frequenza) e tenuto conto della (2.47), dalla seconda delle (3.28) si ottiene

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{\omega}{\beta}, \quad (3.30)$$

ovvero

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.31)$$

3.3 Teorema di Poynting per i vettori complessi

Moltiplicando scalarmente la coniugata della (3.9) per \bar{E} e la (3.10) per \bar{H}^* e sottraendo membro a membro le relazioni così ottenute, si ha

$$\begin{aligned} & \text{rot } \bar{H}^* \cdot \bar{E} - \text{rot } \bar{E} \cdot \bar{H}^* = \\ & = -j\omega \left(\epsilon \bar{E}^* \cdot \bar{E} - \mu \bar{H}^* \cdot \bar{H} \right) + \gamma \bar{E} \cdot \bar{E}^* + \bar{J}_i^* \cdot \bar{E}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

¹ $\sigma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon_c = -\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \gamma$ è un numero complesso che nel piano di Gauss è rappresentato da un vettore situato nel II quadrante; quindi le sue radici sono rappresentate da due vettori che stanno uno nel I, l'altro nel III quadrante.

La (3.32) integrata su un volume V racchiuso da una superficie S avente \hat{n} come versore normale diretto verso l'esterno, tenuto conto della identità vettoriale

$$\operatorname{div} (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*) = \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{H}}^* - \operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}^* \cdot \bar{\mathbf{E}} \quad (3.33)$$

e del teorema di Gauss si scrive

$$\begin{aligned} & - \int_S \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^* \cdot \hat{n} dS = \\ & = j\omega \int_V (\mu \bar{\mathbf{H}}^* \cdot \bar{\mathbf{H}} - \varepsilon \bar{\mathbf{E}}^* \cdot \bar{\mathbf{E}}) dV + \\ & + \int_V \gamma \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^* dV + \int_V \bar{\mathbf{J}}_i^* \cdot \bar{\mathbf{E}} dV. \end{aligned} \quad (3.34)$$

La (3.34) esprime il teorema di Poynting per i vettori complessi; essa può essere messa nella forma

$$\begin{aligned} & - \int_V \frac{\bar{\mathbf{J}}_i^* \cdot \bar{\mathbf{E}}}{2} dV = \int_S \frac{\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*}{2} \cdot \hat{n} dS + \\ & + 2j\omega \int_V \left(\mu \frac{\bar{\mathbf{H}}^* \cdot \bar{\mathbf{H}}}{4} - \varepsilon \frac{\bar{\mathbf{E}}^* \cdot \bar{\mathbf{E}}}{4} \right) dV + \int_V \gamma \frac{\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^*}{2} dV, \end{aligned} \quad (3.35)$$

che meglio si presta all'interpretazione fisica dei termini che vi compaiono. Infatti, eseguendo la media in un periodo T della potenza istantanea (tale media è detta *potenza attiva*) erogata dalle correnti impresse localizzate entro V , data dalla (2.48), tenuto conto delle espressioni (3.1) (3.3) di $\bar{\mathbf{J}}_{\sim}$ ed $\bar{\mathbf{E}}_{\sim}$ si ha

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{T} \int_0^T \int_V \bar{\mathbf{J}}_{\sim i} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{\sim} dV dt = \\ & = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_V \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{J}}_i e^{j\omega t} + \bar{\mathbf{J}}_i^* e^{-j\omega t}) \cdot \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t} + \bar{\mathbf{E}}^* e^{-j\omega t}) dV dt = \\ & = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_V \frac{1}{4} (\bar{\mathbf{J}}_i \cdot \bar{\mathbf{E}}^* + \bar{\mathbf{J}}_i^* \cdot \bar{\mathbf{E}}) dV dt - \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T \int_V \frac{1}{4} (\bar{\mathbf{J}}_i \cdot \bar{\mathbf{E}} e^{2j\omega t} + \bar{\mathbf{J}}_i^* \cdot \bar{\mathbf{E}}^* e^{-2j\omega t}) dV dt. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Essendo $e^{2j\omega t}$, $e^{-2j\omega t}$ esprimibili mediante funzioni sinusoidali del tempo di periodo $T/2$, il loro valore medio in T è nullo e quindi la (3.36) diviene

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{T} \int_0^T \int_V \bar{\mathbf{J}}_{\sim i} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{\sim} dV dt = \\ & = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_V \frac{1}{4} (\bar{\mathbf{J}}_i \cdot \bar{\mathbf{E}}^* + \bar{\mathbf{J}}_i^* \cdot \bar{\mathbf{E}}) dV dt = \\ & = - \int_V \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{J}}_i \cdot \bar{\mathbf{E}}^* + \bar{\mathbf{J}}_i^* \cdot \bar{\mathbf{E}}}{2} \right) dV = \operatorname{Re} \left[- \int_V \frac{\bar{\mathbf{J}}_i^* \cdot \bar{\mathbf{E}}}{2} dV \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dalla (3.37) discende che la parte reale P del primo membro della (3.35),

$$P_c = P + jQ = - \int_V \frac{\bar{\mathbf{J}}_i^* \cdot \bar{\mathbf{E}}}{2} dV, \quad (3.38)$$

uguaglia la potenza attiva erogata dalle sorgenti contenute entro V . Alla (3.38) si dà il nome di *potenza complessa* competente alle correnti impresse entro V . Analogamente si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T \int_S \bar{\mathbf{E}}_{\sim} \times \bar{\mathbf{H}}_{\sim} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \, dt = \int_S \frac{1}{2} \frac{\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^* + \bar{\mathbf{E}}^* \times \bar{\mathbf{H}}}{2} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \\ & = \mathcal{R}e \left[\int_S \frac{\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*}{2} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Al flusso del vettore complesso di Poynting uscente da S si dà il nome di potenza complessa attraversante la superficie S stessa; per questa grandezza si adotta il simbolo

$$P_{cS} = P_S + j Q_S = \int_S \frac{\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*}{2} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (3.40)$$

Dalle (3.39) (3.40) si deduce che P_S è la potenza attiva che attraversa la superficie S . Ancora, analogamente, indicata con \mathcal{T} l'energia magnetica immagazzinata all'istante t nel volume V e con \mathcal{U} l'energia elettrica immagazzinata al medesimo istante nello stesso volume,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \int_V \frac{1}{2} \mu \bar{\mathbf{H}}_{\sim} \cdot \bar{\mathbf{H}}_{\sim} \, dV, \\ \mathcal{U} &= \int_V \frac{1}{2} \varepsilon \bar{\mathbf{E}}_{\sim} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{\sim} \, dV, \end{aligned} \quad (3.41)$$

si ha, chiamando rispettivamente \mathcal{T}_m , \mathcal{U}_m i valori medi di \mathcal{T} e \mathcal{U} in un periodo,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_m &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{T} \, dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_V \frac{1}{2} \mu \bar{\mathbf{H}}_{\sim} \cdot \bar{\mathbf{H}}_{\sim} \, dV \, dt = \int_V \mu \frac{\bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{H}}^*}{4} \, dV, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_m &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{U} \, dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_V \frac{1}{2} \varepsilon \bar{\mathbf{E}}_{\sim} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{\sim} \, dV \, dt = \int_V \varepsilon \frac{\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^*}{4} \, dV. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Infine, indicata con P_J la potenza attiva dissipata in calore nel volume V , si ha

$$P_J = \frac{1}{T} \int_0^T \int_V \gamma \bar{\mathbf{E}}_{\sim} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{\sim} \, dV \, dt = \int_V \gamma \frac{\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^*}{2} \, dV. \quad (3.44)$$

Tenuto conto delle (3.38), (3.40), (3.42), (3.43), (3.44), la (3.35) si scrive

$$P + j Q = P_S + j Q_S + 2 j \omega (\mathcal{T}_m - \mathcal{U}_m) + P_J, \quad (3.45)$$

che si scinde nelle due eguaglianze

$$P = P_S + P_J, \quad (3.46)$$

$$Q = Q_S + 2 \omega (\mathcal{T}_m - \mathcal{U}_m). \quad (3.47)$$

Dalla (3.46) si deduce che la potenza attiva P erogata dalle correnti impresse entro V è uguale alla somma della potenza attiva P_S uscente da S e della potenza attiva P_J dissipata in calore nel volume V . Dalla (3.47) si ha a sua volta che la potenza reattiva Q è la somma della potenza reattiva attraversante la superficie S , Q_S , e della differenza fra i valori medi in un periodo dell'energia magnetica e

dell'energia elettrica immagazzinate nel volume V , moltiplicata per 2ω .

Un insieme di sorgenti e/o di utilizzatori situati all'interno di una superficie S si dice in risonanza quando è

$$Q = 0. \quad (3.48)$$

Se tutte le sorgenti sono al finito, si dimostrerà che Q_S tende a zero al tendere all'infinito dei punti di S , cioè per V che tende a V_∞ ; al limite la condizione di risonanza diviene quindi, per la (3.47),

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{U}_m. \quad (3.49)$$

3.4 Teorema di unicità per il campo e. m. complesso

Le condizioni ai limiti che individuano univocamente (come deve essere se si desidera che i risultati della teoria coincidano con quelli sperimentali) la soluzione delle (3.10) (3.14) corrispondente ad una data \bar{J}_i nei punti di una regione limitata V sono, nell'ipotesi $\gamma \neq 0$, soltanto quelle al contorno. Infatti, si supponga che \bar{E} , \bar{H} , \bar{E}' , \bar{H}' siano due soluzioni delle (3.10) (3.14) scritte con termine noto \bar{J}_i , tali che sia

$$\bar{E}_t = \bar{E}'_t \quad o \quad \bar{H}_t = \bar{H}'_t, \quad (3.50)$$

nei punti della superficie S delimitante V (il pedice t sta ad indicare che si tratta del componente tangente ad S). Il campo elettromagnetico differenza, di intensità

$$\bar{e} = \bar{E} - \bar{E}', \quad \bar{h} = \bar{H} - \bar{H}', \quad (3.51)$$

è una soluzione delle equazioni di Maxwell omogenee ($\bar{J}_i = 0$ nella (3.14)) e ad esso si può perciò applicare il teorema di Poynting, con il primo membro della (3.35) uguale a zero. Dalla relazione così scritta si trae

$$\mathcal{R}e \left[\int_S \frac{\bar{e} \times \bar{h}^*}{2} \cdot \hat{n} dS \right] + \int_V \gamma \frac{\bar{e} \cdot \bar{e}^*}{2} dV = 0, \quad (3.52)$$

$$\mathcal{I}m \left[\int_S \frac{\bar{e} \times \bar{h}^*}{2} \cdot \hat{n} dS \right] + 2\omega \int_V \left(\mu \frac{\bar{h} \cdot \bar{h}^*}{4} - \varepsilon \frac{\bar{e} \cdot \bar{e}^*}{4} \right) dV = 0. \quad (3.53)$$

Dato che si ha

$$\int_S \frac{\bar{e} \times \bar{h}^*}{2} \cdot \hat{n} dS = \int_S \frac{\bar{e}_t \times \bar{h}_t^*}{2} \cdot \hat{n} dS \quad (3.54)$$

e che tale integrale è nullo per le (3.50), le (3.52) (3.53) si scrivono

$$\int_V \gamma \frac{\bar{e} \cdot \bar{e}^*}{2} dV = 0, \quad (3.55)$$

$$\int_V \left(\mu \frac{\bar{h} \cdot \bar{h}^*}{4} - \varepsilon \frac{\bar{e} \cdot \bar{e}^*}{4} \right) dV = 0. \quad (3.56)$$

Nell'ipotesi $\gamma \neq 0$, dalla (3.55) si deduce che in V deve essere $\bar{e} = 0$; di conseguenza, dalla (3.56) viene anche che deve essere $\bar{h} = 0$. Ciò dimostra che in tal caso entro S vi è una ed una sola soluzione delle (3.10) (3.14) che soddisfa a date condizioni al contorno (cioè assume prefissati valori di \bar{E}_t o di \bar{H}_t nei punti di S). È importante sottolineare che l'ipotesi di mezzo con perdite ($\gamma \neq 0$) in V , è essenziale; infatti se è $\gamma = 0$, la (3.55) è identicamente soddisfatta qualunque sia \bar{e} e la (3.56) si limita ad imporre l'uguaglianza delle energie elettrica e magnetica mediamente immagazzinate in un periodo entro V . Se è possibile perciò trovare una soluzione risonante alla pulsazione ω delle equazioni

di Maxwell omogenee entro S , per la quale è $\bar{e}_t = 0$ su S , la soluzione non è univocamente determinata dalla sorgente e dalle condizioni al contorno.

Nel seguito, per poter ritenere valido il teorema di unicità si supporrà sempre $\gamma \neq 0$ e quando si parlerà di $\gamma = 0$ si intenderà in realtà γ piccolo quanto si voglia, ma mai nullo.

Se anziché una regione limitata V , si considera tutto lo spazio V_∞ , il campo elettromagnetico, associato con una data \bar{J}_i situata al finito in un mezzo avente $\gamma \neq 0$, è unico se al posto delle condizioni al contorno si impongono le seguenti condizioni

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \bar{E} = 0, \quad (3.57)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \bar{H} = 0, \quad (3.58)$$

nelle quali si è indicata con r la distanza di un punto qualsivoglia P di V_∞ da un punto arbitrario O , al finito, scelto come origine. Si supponga infatti che esistano due campi \bar{E}, \bar{H} ed \bar{E}', \bar{H}' che soddisfino le equazioni di Maxwell scritte con lo stesso termine noto e tali che per entrambi valgano le (3.57) (3.58); per il campo differenza di intensità $\bar{e} = \bar{E} - \bar{E}', \bar{h} = \bar{H} - \bar{H}'$ si ha allora

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \bar{e} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \bar{h} = 0. \quad (3.59)$$

Per il teorema di Poynting, tenuto presente che \bar{e}, \bar{h} sono una soluzione delle equazioni di Maxwell omogenee, si ha anche per un V qualsivoglia, delimitato da una superficie S

$$0 = \operatorname{Re} \left[\int_S \frac{\bar{e} \times \bar{h}^*}{2} \cdot \hat{n} dS \right] + \int_V \gamma \frac{\bar{e} \cdot \bar{e}^*}{2} dV, \quad (3.60)$$

$$0 = \operatorname{Im} \left[\int_S \frac{\bar{e} \times \bar{h}^*}{2} \cdot \hat{n} dS \right] + 2\omega \left[\int_V \left(\mu \frac{\bar{h} \cdot \bar{h}^*}{4} - \varepsilon \frac{\bar{e} \cdot \bar{e}^*}{4} \right) dV \right]. \quad (3.61)$$

Facendo tendere tutti i punti di S all'infinito e quindi V a V_∞ dalla (3.60) segue

$$0 = \lim_{S \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\int_S \frac{\bar{e} \times \bar{h}^*}{2} \cdot \hat{n} dS \right] + \lim_{V \rightarrow V_\infty} \int_V \gamma \frac{\bar{e} \cdot \bar{e}^*}{2} dV. \quad (3.62)$$

Peraltro, dato che il modo di tendere all'infinito dei punti di S è arbitrario, si può assumere la S stessa coincidente con la superficie sferica di raggio r e centro in O , cosicché la (3.62) può porsi nella forma

$$0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\int_{4\pi} \frac{\bar{e} \times \bar{h}^*}{2} \cdot \hat{r} r^2 d\Omega \right] + \lim_{V \rightarrow V_\infty} \int_V \gamma \frac{\bar{e} \cdot \bar{e}^*}{2} dV. \quad (3.63)$$

Poichè per le (3.59) il valore assoluto di

$$\operatorname{Re} \left[\int_{4\pi} \frac{\bar{e} \times \bar{h}^*}{2} \cdot \hat{r} r^2 d\Omega \right],$$

da un certo valore di r in poi, diminuisce al crescere di r , mentre

$$\int_V \gamma \frac{\bar{e} \cdot \bar{e}^*}{2} dV$$

è crescente al tendere di V a V_∞ , è allora immediato che nell'ipotesi di conducibilità dappertutto non nulla la (3.62) può essere soddisfatta solo per $\bar{e} = 0$; dato che ciò comporta, per la (3.61), anche $\bar{h} = 0$, si ha allora $\bar{E} = \bar{E}', \bar{H} = \bar{H}'$, c.v.d..

3.5 Correnti volumetriche equivalenti. Equazioni di Maxwell con termini noti elettrici e magnetici, in mezzo omogeneo

Le (3.10) (3.14) possono essere estese al caso di mezzo disomogeneo ponendo $\varepsilon = \varepsilon(P)$ (eventualmente complesso, $\varepsilon_c = \varepsilon(P) + \gamma(P)/j\omega$), $\mu = \mu(P)$, ovvero scrivendo

$$\text{rot } \bar{H} = j\omega \varepsilon(P) \bar{E} + \bar{J}_i, \quad (3.64)$$

$$\text{rot } \bar{E} = -j\omega \mu(P) \bar{H}, \quad (3.65)$$

con l'ipotesi che \bar{J}_i , $\varepsilon(P)$, $\mu(P)$ siano tali che \bar{E} , \bar{H} ammettano rotore e divergenza in tutto V_∞ . Si considerino ora due valori ε , μ arbitrari, costanti; si può evidentemente scrivere

$$\text{rot } \bar{H} = j\omega \varepsilon \bar{E} + j\omega [\varepsilon(P) - \varepsilon] \bar{E} + \bar{J}_i, \quad (3.66)$$

$$\text{rot } \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H} - j\omega [\mu(P) - \mu] \bar{H}, \quad (3.67)$$

per cui, ponendo

$$\bar{J}_V = j\omega [\varepsilon(P) - \varepsilon] \bar{E} + \bar{J}_i, \quad (3.68)$$

$$\bar{M}_V = j\omega [\mu(P) - \mu] \bar{H}, \quad (3.69)$$

si ha anche

$$\text{rot } \bar{H} = j\omega \varepsilon \bar{E} + \bar{J}_V, \quad (3.70)$$

$$\text{rot } \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H} - \bar{M}_V. \quad (3.71)$$

Pertanto se si considerano come termini noti la densità di corrente elettrica volumetrica $\bar{J}_V = \bar{J}_i + j\omega [\varepsilon(P) - \varepsilon] \bar{E}$ e la densità di corrente magnetica volumetrica $\bar{M}_V = j\omega [\mu(P) - \mu] \bar{H}$, il caso di mezzo disomogeneo viene ricondotto a quello di un mezzo omogeneo di parametri ε , μ .

Le correnti di densità $j\omega [\varepsilon(P) - \varepsilon] \bar{E}$ e $j\omega [\mu(P) - \mu] \bar{H}$ prendono il nome di *correnti volumetriche equivalenti* (alle disomogeneità) e sono *generatori comandati*, dato che essi hanno un valore dipendente da altri *generatori* che, essendo costituiti da correnti impresse vere e proprie, sono invece *generatori liberi*.

Ovviamente quanto ora si è visto equivale a dire che introdurre le correnti volumetriche equivalenti di densità $j\omega [\varepsilon(P) - \varepsilon] \bar{E}$ e $j\omega [\mu(P) - \mu] \bar{H}$ permette di eliminare le disomogeneità del mezzo, ma ciò è generalmente valido solo in linea di principio, perchè per conoscere \bar{J}_V ed \bar{M}_V è necessario conoscere *a priori* \bar{E} ed \bar{H} laddove vi sono disomogeneità. In alcuni casi particolari tuttavia è relativamente semplice calcolare o misurare valori sufficientemente approssimati di \bar{E} e/o di \bar{H} in regioni limitate nelle quali e soltanto nelle quali è $\varepsilon(P) \neq \varepsilon$ e/o $\mu(P) \neq \mu$ per cui è possibile trattare come termini noti le funzioni $[\varepsilon(P) - \varepsilon] \bar{E}$ e/o $[\mu(P) - \mu] \bar{H}$.

Sulla base delle osservazioni sopra esposte, nel seguito si considererà, salvo avviso in contrario, soltanto il caso di un mezzo dappertutto omogeneo. Dato che per le ipotesi fatte \bar{E} , \bar{H} , \bar{J}_V , \bar{M}_V ammettono divergenza in tutti i punti di V_∞ , prendendo la divergenza di entrambi i membri delle (3.70) (3.71) si ottiene

$$\text{div } \bar{E} = -\frac{\text{div } \bar{J}_V}{j\omega \varepsilon} = \frac{\rho_V}{\varepsilon}, \quad (3.72)$$

$$\text{div } \bar{H} = -\frac{\text{div } \bar{M}_V}{j\omega \mu} = \frac{\lambda_V}{\mu}, \quad (3.73)$$

avendo posto (*equazioni di continuità*)

$$\text{div } \bar{J}_V = -j\omega \rho_V, \quad (3.74)$$

$$\text{div } \bar{M}_V = -j\omega \lambda_V, \quad (3.75)$$

con ρ_V densità di carica elettrica di volume e λ_V densità di carica magnetica di volume (la denominazione di λ_V non tragga in inganno: l'introduzione di λ_V non equivale ad ipotizzare che esistano cariche magnetiche nel mondo fisico). Nello studio di fenomeni elettromagnetici si può far ricorso alle (3.70) (3.71) (3.72) (3.73) dando a \bar{J}_V, \bar{M}_V il significato di termini noti capaci di descrivere matematicamente sorgenti fisiche e disomogeneità del mezzo. Ovviamente ciò porterà ad utili risultati soltanto se, data una sorgente fisica e le caratteristiche del mezzo in V_∞ , si sarà in grado di fissare \bar{J}_V ed \bar{M}_V in modo tale che le intensità di campo \bar{E}, \bar{H} calcolate coincidano con i valori misurati (a meno degli errori di misura). In accordo con quanto detto sinora, la scelta di \bar{J}_V, \bar{M}_V dovrà essere fatta in modo che tali funzioni vettoriali di punto ammettano divergenza dappertutto in V_∞ (altrimenti, per le (3.72) (3.73), \bar{E}, \bar{H} non avrebbero divergenza definita dappertutto in V_∞). Inoltre con procedura identica a quella seguita in 3.4 si dimostra che il campo è univocamente definito se ai termini noti \bar{J}_V, \bar{M}_V si aggiungono le condizioni al contorno in una regione limitata $V \subset V_\infty$ e le (3.57) (3.58) in V_∞ (le condizioni all'istante iniziale non portano informazione per la supposta dipendenza sinusoidale da t delle grandezze in gioco).

Capitolo 4

Campi elettromagnetici come distribuzioni

4.1 Introduzione

Nel Capitolo 2 si è formulata una teoria matematica dei campi elettromagnetici basata sull'ipotesi di grandezze in gioco \overline{E} , \overline{H} che ammettono derivata rispetto al tempo, nonché rotore e divergenza in tutto lo spazio V_∞ . In base ad essa lo studio di un fenomeno elettromagnetico in una regione V , a partire da un certo istante $t = 0$ in poi, può essere fatto attraverso la risoluzione delle equazioni di Maxwell se si è in grado di dedurre dall'esame del fenomeno che interessa un possibile valore del termine noto $\overline{J}_i(P, t)$, dei parametri del mezzo e delle condizioni ai limiti.

La coppia di funzioni $\overline{E}(P, t)$, $\overline{H}(P, t)$ che così si ottiene è valida, dal punto di vista della descrizione del fenomeno fisico, se almeno in una certa regione di spazio e per un certo intervallo di tempo essa coincide con i valori misurati delle intensità di campo elettrico e magnetico, a meno della imprecisione delle apparecchiature di misura. È chiaro che diverse scelte di $\overline{J}_i(P, t)$ e delle condizioni ai limiti per assegnati valori dei parametri del mezzo $\varepsilon(P)$, $\mu(P)$ porteranno a diverse funzioni $\overline{E}(P, t)$, $\overline{H}(P, t)$, ma è anche intuitivo che diverse scelte di $\overline{J}_i(P, t)$ e delle condizioni ai limiti potranno portare a valori che, pur risultando anche notevolmente diversi in certe regioni di spazio ed in certi intervalli di tempo, saranno ugualmente accettabili in regioni di spazio ed intervalli di tempo particolari. L'abilità di chi utilizza la teoria matematica dovrà allora dimostrarsi non solo nell'ottenere le funzioni $\overline{E}(P, t)$, $\overline{H}(P, t)$, ma anche nello scegliere $\overline{J}_i(P, t)$ e le condizioni ai limiti in modo tale che la risoluzione delle equazioni di Maxwell risulti la più agevole possibile. Questa osservazione, oltre a suggerire un criterio da tenere presente in fase di definizione della funzione $\overline{J}_i(P, t)$ e delle condizioni ai limiti, porta anche a porsi la seguente domanda: non sarà possibile formulare un problema matematico diverso da quello considerato in precedenza, ma ugualmente valido e più facile da risolvere? Una prima risposta positiva a tale quesito è stata fornita attraverso l'introduzione, nel Capitolo 3 dei vettori variabili sinusoidalmente e dei vettori complessi che li rappresentano. L'andamento sinusoidale nel tempo, da $-\infty$ a $+\infty$, non è aderente a quello delle grandezze di un fenomeno fisico, perché si suppone che tutti i fenomeni abbiano avuto inizio in un istante $t = \bar{t} \leq 0$ con \bar{t} finito, ma i risultati della teoria del Capitolo 3. che è più semplice di quella del Capitolo 2, possono essere usati quando il transitorio si è praticamente esaurito, se si ha a che fare con sorgenti che sono nulle per $t < 0$ e sinusoidali per $t > 0$. Inoltre, nel caso di parametri del mezzo indipendenti dal tempo, tali risultati possono essere usati attraverso la trasformata di Fourier per trovare la soluzione anche nel caso di dipendenza dal tempo non sinusoidale. Un'ulteriore risposta positiva al quesito che ci si è posti in precedenza verrà data in questo Capitolo formulando una nuova teoria per i vettori complessi, basata sull'uso delle funzioni generalizzate o distribuzioni [1], di cui in Appendice A vengono illustrate, oltre alle definizioni, anche alcune proprietà utilizzate nel seguito.

Ciò permetterà di schematizzare le sorgenti del campo elettromagnetico con sorgenti volumetriche, superficiali, lineari, puntiformi (sia elettriche, sia magnetiche) e porterà ad una semplificazione del problema matematico.

In questo capitolo le funzioni ordinarie verranno indicate mettendo in evidenza la variabile di punto (ad esempio $f(P)$, $\bar{A}(P)$), mentre le distribuzioni verranno indicate con un simbolo nel quale tale variabile non compare (ad esempio f , \bar{A}). Quest'ultima convenzione potrebbe dar luogo a qualche confusione quando si avrà a che fare contemporaneamente con distribuzioni e grandezze costanti in V_∞ ; ogni dubbio dovrebbe tuttavia essere fugato dal contesto nel quale i vari simboli verranno usati.

4.2 Equazioni di Maxwell per le distribuzioni

Mettendo in evidenza la dipendenza dal punto P , le (3.70) (3.71) si scrivono

$$\text{rot } \bar{H}(P) = j\omega\varepsilon\bar{E}(P) + \bar{J}_V(P), \quad (4.1)$$

$$\text{rot } \bar{E}(P) = -j\omega\mu\bar{H}(P) - \bar{M}_V(P), \quad (4.2)$$

$$P \in V_\infty.$$

Se si indica con U_{V_∞} la distribuzione di Heaviside relativa a V_∞ (generata dalla funzione di Heaviside relativa a V_∞ , $U_{V_\infty}(P)$, uguale ad 1 in tutto V_∞) e si moltiplicano ambo i membri delle (4.1)(4.2) per U_{V_∞} si può allora scrivere

$$U_{V_\infty} \text{rot } \bar{H}(P) = j\omega\varepsilon\bar{E}(P)U_{V_\infty} + \bar{J}_V(P)U_{V_\infty}, \quad (4.3)$$

$$U_{V_\infty} \text{rot } \bar{E}(P) = -j\omega\mu\bar{H}(P)U_{V_\infty} - \bar{M}_V(P)U_{V_\infty}. \quad (4.4)$$

D'altra parte, introdotte le distribuzioni (si tenga presente che $|\bar{E}(P)|^2$ e $|\bar{H}(P)|^2$ sono sicuramente localmente sommabili perché proporzionali alle densità di energia mediamente immagazzinate in un periodo)

$$\bar{E} = \bar{E}(P)U_{V_\infty}, \quad (4.5)$$

$$\bar{H} = \bar{H}(P)U_{V_\infty}, \quad (4.6)$$

per la (B.85), essendo $\text{grad}U_{V_\infty} = 0$, si ha

$$\text{rot } \bar{H} = \text{rot } [\bar{H}(P)U_{V_\infty}] = U_{V_\infty} \text{rot } \bar{H}(P), \quad (4.7)$$

$$\text{rot } \bar{E} = \text{rot } [\bar{E}(P)U_{V_\infty}] = U_{V_\infty} \text{rot } \bar{E}(P), \quad (4.8)$$

per cui se si pone anche

$$\bar{J}_V = \bar{J}_V(P)U_{V_\infty}, \quad (4.9)$$

$$\bar{M}_V = \bar{M}_V(P)U_{V_\infty}, \quad (4.10)$$

le (4.3) (4.4) portano a scrivere

$$\text{rot } \bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} + \bar{J}_V, \quad (4.11)$$

$$\text{rot } \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} - \bar{M}_V. \quad (4.12)$$

Le (4.11) (4.12) sono soltanto un modo diverso di esprimere i legami imposti dalle (4.1) (4.2) dato che le intensità di campo elettrico, $\bar{E}(P)$, e magnetico, $\bar{H}(P)$, sono ottenibili dalle

$$\bar{E}(P) = \bar{E}[P], \quad (4.13)$$

$$\bar{H}(P) = \bar{H}[P], \quad (4.14)$$

con $\overline{E}[P]$, $\overline{H}[P]$ valori locali (definiti in tutto V_∞) delle distribuzioni \overline{E} , \overline{H} . Le (4.11) (4.12) (4.13) (4.14) sono tuttavia molto utili, perché suggeriscono di generalizzare la teoria sinora svolta introducendo, al posto di \overline{J}_V , \overline{M}_V , due opportune distribuzioni \overline{J} , \overline{M} cosí che si possa scrivere

$$\text{rot } \overline{H} = j\omega\varepsilon\overline{E} + \overline{J}, \quad (4.15)$$

$$\text{rot } \overline{E} = -j\omega\mu\overline{H} - \overline{M} \quad (4.16)$$

e supporre che le (4.13) (4.14) siano ancora valide, cioè che le intensità $\overline{E}(P)$, $\overline{H}(P)$ coincidano con i valori locali delle distribuzioni \overline{E} , \overline{H} , che soddisfano le (4.15) (4.16).

Ovviamente $\overline{E}(P)$, $\overline{H}(P)$ dipenderanno dai nuovi termini noti, per cui la nuova teoria proposta avrà valore applicativo se, e soltanto se, data una sorgente fisica in un mezzo normale (non necessariamente omogeneo), si è in grado di definire \overline{J} , \overline{M} in modo tale che dalle (4.13) (4.14) si ottengano funzioni $\overline{E}(P)$, $\overline{H}(P)$ che approssimano in modo soddisfacente i valori delle intensità di campo misurabili (almeno nella parte di V_∞ che interessa) ed aventi il corretto comportamento all'infinito, cioè soddisfacenti le (2.57) (2.58) di Capitolo 2.

Si noti infine che le (4.15) (4.16) sono formalmente identiche alle (3.70) (3.71), ma mentre queste ultime sono uguaglianze fra funzioni ordinarie, valide punto per punto, le prime sono uguaglianze nel senso delle distribuzioni, cioè, indicata con $\varphi(P)$ una qualsiasi funzione di prova, esse implicano che deve essere

$$\langle \text{rot } \overline{H}, \varphi \rangle = j\omega\varepsilon \langle \overline{E}, \varphi \rangle + \langle \overline{J}, \varphi \rangle, \quad (4.17)$$

$$\langle \text{rot } \overline{E}, \varphi \rangle = -j\omega\mu \langle \overline{H}, \varphi \rangle - \langle \overline{M}, \varphi \rangle. \quad (4.18)$$

4.3 Equazioni di continuità per le distribuzioni

Poiché una distribuzione è derivabile infinite volte, qualsiasi distribuzione vettoriale ammette divergenza per cui dalla (4.15), scritta con ε_c al posto di ε , e dalla (4.16) discende

$$\text{div } \overline{E} = -\frac{\text{div } \overline{J}}{j\omega\varepsilon_c}, \quad (4.19)$$

$$\text{div } \overline{H} = -\frac{\text{div } \overline{M}}{j\omega\mu} \quad (4.20)$$

(si tenga presente che la divergenza di un rotore è sempre nulla). *Le equazioni di continuità per le distribuzioni* sono

$$\text{div } (\overline{J} + \gamma\overline{E}) = -j\omega\rho, \quad (4.21)$$

$$\text{div } \overline{M} = -j\omega\lambda \quad (4.22)$$

e permettono la definizione delle distribuzioni *densità di carica elettrica* ρ e *densità di carica magnetica* λ ; utilizzando le (4.21) (4.22) dalle (4.19) (4.20) discende anche

$$\text{div } \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (4.23)$$

$$\text{div } \overline{H} = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (4.24)$$

4.4 Potenziali vettori

Si consideri, per il momento, il caso per il quale le (4.15) (4.16) (4.20) si scrivono

$$\operatorname{rot} \bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} + \bar{J}, \quad (4.25)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H}, \quad (4.26)$$

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0. \quad (4.27)$$

Per la (4.27) si ha allora

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A}, \quad (4.28)$$

con \bar{A} distribuzione da determinare in guisa tale che le (4.25) (4.26) siano soddisfatte; introducendo la (4.28) nella (4.26) si ha

$$\operatorname{rot} (\bar{E} + j\omega\bar{A}) = 0, \quad (4.29)$$

per cui, indicata con p una distribuzione arbitraria, si ha anche

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} p - j\omega\bar{A}. \quad (4.30)$$

Le distribuzioni \bar{A} (*potenziale vettore magnetico*) e p (*potenziale scalare elettrico*) debbono essere tali che, oltre alla (4.26), sia soddisfatta anche la (4.25), cioè deve aversi

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = -j\omega\varepsilon \operatorname{grad} p + \omega^2\varepsilon\bar{A} + \bar{J}, \quad (4.31)$$

ovvero, posto

$$\sigma^2 = -\omega^2\mu\varepsilon, \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} &= -\nabla^2\bar{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} = \\ &= -j\omega\mu\varepsilon \operatorname{grad} p - \sigma^2\bar{A} + \mu\bar{J}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Peraltro l'arbitrarietà di p permette di imporre (*condizione di Lorentz*)

$$\operatorname{div} \bar{A} + j\omega\mu\varepsilon p = 0, \quad (4.34)$$

nel qual caso \bar{A} deve soddisfare all'equazione

$$\nabla^2\bar{A} - \sigma^2\bar{A} = -\mu\bar{J} \quad (4.35)$$

se si vuole che le (4.30) (4.28) soddisfino alle equazioni di Maxwell. Combinando le (4.30) (4.34) si ha anche la relazione

$$\bar{E} = \frac{\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A}}{j\omega\mu\varepsilon} - j\omega\bar{A}, \quad (4.36)$$

che permette di ricavare \bar{E} in funzione del solo potenziale vettore \bar{A} . In alternativa alla (4.36) si può utilizzare la (4.25) per scrivere

$$\bar{E} = \frac{\operatorname{rot} \bar{H}}{j\omega\varepsilon} - \frac{\bar{J}}{j\omega\varepsilon} = \frac{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A}}{j\omega\mu\varepsilon} - \frac{\bar{J}}{j\omega\varepsilon}, \quad (4.37)$$

espressione particolarmente utile quando si conosca già \bar{H} .

Procedendo in modo analogo, a partire dalle (4.15) (4.16) (4.19) nel caso $\bar{J} = 0$, $\bar{M} \neq 0$ si ha

$$\operatorname{rot} \bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E}, \quad (4.38)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} - \bar{M}, \quad (4.39)$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0, \quad (4.40)$$

$$\bar{E} = -\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot} \bar{F} \quad (4.41)$$

(\bar{F} potenziale vettore elettrico),

$$\bar{H} = -\operatorname{grad} s - j\omega\bar{F} \quad (4.42)$$

(s potenziale scalare magnetico),

$$\operatorname{div} \bar{F} + j\omega\mu\varepsilon s = 0, \quad (4.43)$$

$$\nabla^2 \bar{F} - \sigma^2 \bar{F} = -\varepsilon\bar{M}, \quad (4.44)$$

$$\bar{H} = \frac{\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{F}}{j\omega\mu\varepsilon} - j\omega\bar{F}, \quad (4.45)$$

$$\bar{H} = -\frac{\operatorname{rot} \bar{E}}{j\omega\mu} - \frac{\bar{M}}{j\omega\mu} = \frac{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{F}}{j\omega\mu\varepsilon} - \frac{\bar{M}}{j\omega\mu}. \quad (4.46)$$

Le formule valide nel caso $\bar{J} \neq 0, \bar{M} \neq 0$ si ricavano combinando i risultati precedenti; in particolare, utilizzando i soli potenziali vettori si ha

$$\bar{E} = \frac{\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A}}{j\omega\mu\varepsilon} - j\omega\bar{A} - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot} \bar{F}, \quad (4.47)$$

$$\bar{H} = \frac{\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{F}}{j\omega\mu\varepsilon} - j\omega\bar{F} + \frac{1}{\mu}\operatorname{rot} \bar{A}. \quad (4.48)$$

4.5 Principio di dualità

Si verifica senza difficoltà che le (4.15) (4.16) (4.23) (4.24) (4.47) (4.48) sono invarianti se sottoposte al seguente insieme di sostituzioni formali

$$\bar{E} \longrightarrow \bar{H}, \quad (4.49)$$

$$\bar{H} \longrightarrow -\bar{E}, \quad (4.50)$$

$$\mu \longleftrightarrow \varepsilon, \quad (4.51)$$

$$\bar{J} \longrightarrow \bar{M}, \quad (4.52)$$

$$\bar{M} \longrightarrow -\bar{J}, \quad (4.53)$$

$$\rho \longrightarrow \lambda, \quad (4.54)$$

$$\lambda \longrightarrow -\rho, \quad (4.55)$$

$$\bar{A} \longrightarrow \bar{F}, \quad (4.56)$$

$$\bar{F} \longrightarrow -\bar{A}, \quad (4.57)$$

$$p \longrightarrow s, \quad (4.58)$$

$$s \longrightarrow -p. \quad (4.59)$$

Questa proprietà è nota come *principio di dualità* e permette di ottenere con facilità le espressioni letterali valide nel caso $\bar{J} = 0, \bar{M} \neq 0$ da quelle del caso $\bar{J} \neq 0, \bar{M} = 0$ e viceversa. Nell'applicare il

principio di dualità si deve avere l'avvertenza di assicurarsi che tutte le grandezze presenti nell'insieme di sostituzioni sopra citato figurino esplicitamente nelle formule considerate. Il principio di dualità ed il principio di sovrapposizione degli effetti consentono di ricavare le formule valide nel caso $\bar{J} \neq 0$, $\bar{M} \neq 0$ da quelle di uno solo dei due casi considerati in precedenza (nel seguito si partirà sempre dallo studio del caso $\bar{J} \neq 0$, $\bar{M} = 0$).

L'attendibilità di quanto ora affermato può essere immediatamente verificata sulle formule del paragrafo precedente; infatti applicando il principio di dualità alle (4.25) (4.26) (4.27) (4.28) (4.30) (4.34) (4.35) (4.36) (4.37) si ottengono le (4.38) (4.39) (4.40) (4.41) (4.42) (4.43) (4.44) (4.45) (4.46), mentre la (4.47) e la (4.48) si ricavano dalle (4.36) (4.41) e dalle (4.28) (4.46) quando si applica il principio di sovrapposizione degli effetti ai due casi $\bar{J} \neq 0$, $\bar{M} = 0$ e $\bar{J} = 0$, $\bar{M} \neq 0$ per ottenere le formule valide quando è $\bar{J} \neq 0$, $\bar{M} \neq 0$.

4.6 Equivalenza di sorgenti elettriche e magnetiche

Si supponga che sia $\bar{J} \neq 0$, $\bar{M} = 0$, per cui si può scrivere

$$\text{rot } \bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} + \bar{J}, \quad (4.60)$$

$$\text{rot } \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H}. \quad (4.61)$$

Posto

$$\bar{E}' = \bar{E} + \frac{\bar{J}}{j\omega\varepsilon}, \quad (4.62)$$

dalla (4.60) discende

$$\text{rot } \bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E}'; \quad (4.63)$$

peraltro si ha

$$\text{rot } \bar{E}' = \text{rot } \bar{E} + \frac{\text{rot } \bar{J}}{j\omega\varepsilon}, \quad (4.64)$$

ovvero, per la (4.61), si può scrivere

$$\text{rot } \bar{E}' = -j\omega\mu\bar{H} + \frac{\text{rot } \bar{J}}{j\omega\varepsilon}. \quad (4.65)$$

Dalle (4.62) (4.63) (4.65) appare evidente che è possibile sostituire al termine noto elettrico \bar{J} il termine noto magnetico $\text{rot } \bar{J}/(j\omega\varepsilon)$ nella ricerca delle intensità del campo elettromagnetico \bar{E} , \bar{H} relative alle regioni di V_∞ nelle quali è nullo il valore locale di \bar{J} , $\bar{J}[P] = 0$.

Per dualità dalle (4.62) (4.65) (4.63) si ottiene anche che le relazioni

$$\bar{H}' = \bar{H} + \frac{\bar{M}}{j\omega\mu}, \quad (4.66)$$

$$\text{rot } \bar{H}' = j\omega\varepsilon\bar{E} + \frac{\text{rot } \bar{M}}{j\omega\mu}, \quad (4.67)$$

$$\text{rot } \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H}'. \quad (4.68)$$

permettono di ottenere nelle regioni in cui è $\bar{M}[P] = 0$ le intensità del campo elettromagnetico \bar{E} , \bar{H} , sostenuto dai termini noti $\bar{J} = 0$, $\bar{M} \neq 0$, in funzione di un solo termine noto elettrico, pari a $\text{rot } \bar{M}/(j\omega\mu)$.

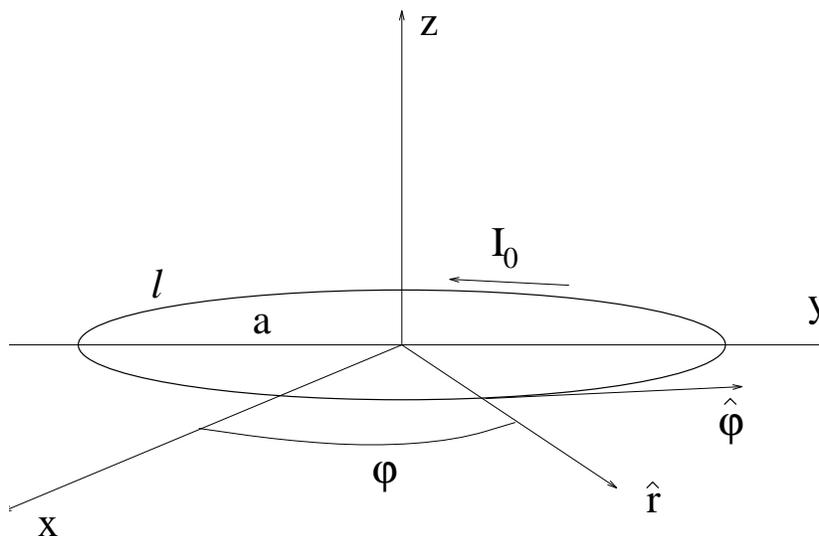


Figura 4.1: Spira percorsa da corrente costante.

Nelle applicazioni l'equivalenza fra generatori elettrici e magnetici consente di scegliere, di volta in volta, il tipo di generatore più semplice da utilizzare. Inoltre la procedura di sostituzione può essere ripetuta quante volte si voglia.

A titolo di esempio, si consideri il caso particolare in cui è

$$\bar{J} = \bar{J}_l = \bar{J}_l(Q) \delta_l = I_0 \hat{\varphi} \delta_l, \quad (4.69)$$

ovvero il caso in cui la sorgente è una corrente elettrica lineare di valore I_0 costante nei punti della circonferenza l (fig. 4.1) alla quale è associata la distribuzione di Dirac δ_l , con il verso della corrente I_0 coincidente con quello della coordinata φ crescente. Per definizione si ha (si noti che $\varphi(P)$ è la funzione di prova, mentre φ è la coordinata sopra citata)

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{J}_l, \varphi(P) \rangle &= \int_l I_0 \hat{\varphi} \varphi(P) dl = I_0 a \int_0^{2\pi} \varphi(P) (-\text{sen } \varphi \hat{i} + \text{cos } \varphi \hat{j}) d\varphi = \\
 &= I_0 a \left[-\hat{i} \int_0^{2\pi} \varphi(P) \text{sen } \varphi d\varphi + \hat{j} \int_0^{2\pi} \varphi(P) \text{cos } \varphi d\varphi \right]. \quad (4.70)
 \end{aligned}$$

Peraltro, per valori sufficientemente piccoli di $r = a$, il valore di $\varphi(P)$ per $P = Q = Q(a, \pi/2, \varphi) \in l$ può essere ottenuto arrestando al secondo termine lo sviluppo di Taylor di $\varphi(P)$ nell'origine quando ci si muova nella direzione di $Q - O$, per cui si può scrivere

$$\begin{aligned}
 \varphi(Q) &= \varphi(0) + a \frac{\partial \varphi}{\partial r}(0) = \varphi(0) + a [\text{grad } \varphi(P)]_{P=0} \cdot \hat{r} = \\
 &= \varphi(0) + a \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0) \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0) \hat{k} \right] \cdot (\text{cos } \varphi \hat{i} + \text{sen } \varphi \hat{j}) = \\
 &= \varphi(0) + a \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) \text{cos } \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0) \text{sen } \varphi \right]; \quad (4.71)
 \end{aligned}$$

sostituendo la (4.71) nella (4.70) e tenendo presente che le funzioni $\text{sen } \varphi$, $\text{cos } \varphi$ e $\text{sen } \varphi \text{cos } \varphi$ danno contributo nullo quando vengono integrate fra 0 e 2π , si ha infine

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{J}_l, \varphi(P) \rangle &= I_0 a^2 \left[-\hat{i} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0) \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \varphi d\varphi + \hat{j} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) \int_0^{2\pi} \text{cos}^2 \varphi d\varphi \right] = \\
 &= I_0 \pi a^2 \left[-\hat{i} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0) + \hat{j} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) \right], \quad (4.72)
 \end{aligned}$$

ovvero si può affermare che quando il raggio a della spira l tende a zero si può scrivere

$$\bar{J}_l = I_0 \pi a^2 \text{grad } \delta \times \hat{k} \quad (4.73)$$

(δ è, ovviamente, la distribuzione di Dirac nell'origine). Si supponga ora che mentre a tende a zero la corrente I_0 tenda all'infinito in modo tale che il prodotto $I_0 \pi a^2 = I_0 S$ si mantenga costante; osservato che per la (B.85) è ($\text{rot } \hat{k} = 0$ perché \hat{k} è costante)

$$\text{rot}(\delta \hat{k}) = \text{grad } \delta \times \hat{k}, \quad (4.74)$$

dalla (4.73) segue

$$\bar{J}_l = \frac{\text{rot}(j \omega \mu I_0 S \delta \hat{k})}{j \omega \mu}, \quad (4.75)$$

per cui, confrontando con la (4.67), si può dire che la sorgente magnetica

$$\bar{M} = j \omega \mu I_0 S \delta \hat{k} = \mathcal{N} \delta \hat{k} \quad (4.76)$$

sostiene un campo elettrico \bar{E} identico a quello dovuto a \bar{J}_l ed un campo magnetico \bar{H} legato a quello \bar{H}' di \bar{J}_l dalla (4.66). Dato che \bar{M} ha valore locale $\bar{M}[P]$ nullo in tutti i punti di V_∞ diversi dall'origine, quanto ora si è trovato permette di scrivere

$$\bar{H}'[P] = \bar{H}[P], \quad P \in V_\infty \setminus 0, \quad (4.77)$$

per cui si può affermare che la sorgente (4.69) sostiene un campo elettromagnetico le cui intensità tendono a quelle del campo della sorgente (4.76) quando si fa tendere a zero il raggio a della spira

e all'infinito I_0 , in modo che sia costante il prodotto $I_0 S$. Il risultato ottenuto altro non è che il *teorema di equivalenza di Ampère*, in base al quale si può affermare che una sorgente fisica, descrivibile in modo soddisfacente con una spira di corrente elettrica lineare, sostiene un campo elettromagnetico le cui intensità $\overline{E}(P), \overline{H}(P)$ praticamente coincidono con quelle di un dipolo magnetico, orientato perpendicolarmente al piano di giacitura, $z = 0$, della spira e di momento

$$\overline{N} = j\omega\mu I_0 S \hat{k}, \quad (4.78)$$

nei punti dello spazio la cui distanza dai punti della spira è molto grande rispetto al raggio a della spira stessa.

4.7 Le intensità di campo $\overline{E}(P), \overline{H}(P)$

Si supponga che in V_∞ vi sia una sola sorgente fisica e che nel problema matematico associato tale sorgente venga rappresentata dalla coppia di distribuzioni $\overline{J} \neq 0, \overline{M} = 0$. Si supponga che per il potenziale vettore \overline{A} associato a \overline{J} si possa scrivere

$$\overline{A} = \overline{A}(P) U_{V_\infty}, \quad (4.79)$$

con $\overline{A}(P)$ localmente sommabile in V_∞ . Indicato con τ un volume delimitato da una superficie σ di normale \hat{n} orientata verso i punti di $V_\infty \setminus \tau$, si faccia ora l'ipotesi che $\overline{A}(P)$ sia derivabile infinite volte in un aperto Ω contenente τ . Dalla (B.99), tenuto presente che V_Ω contiene τ , segue ¹ che si può scrivere ($Q \in \sigma$)

$$\begin{aligned} \text{rot } \overline{A} &= \text{rot} [\overline{A}(P) U_{V_\infty}] = \\ &= \text{rot} [\overline{A}(P) U_{V_\infty \setminus \tau} + \overline{A}(P) U_\tau] = \\ &= \text{rot} [\overline{A}(P) U_{V_\infty \setminus \tau}] + U_\tau \text{rot } \overline{A}(P) - \hat{n} \times \overline{A}(Q) \delta_\sigma, \end{aligned} \quad (4.80)$$

ovvero, per la (B.82),

$$\begin{aligned} \langle \text{rot } \overline{A}, \varphi \rangle &= \langle \text{rot} [\overline{A}(P) U_{V_\infty \setminus \tau}], \varphi \rangle + \\ &+ \langle U_\tau \text{rot } \overline{A}(P), \varphi \rangle - \langle \hat{n} \times \overline{A}(Q) \delta_\sigma, \varphi \rangle = \\ &= - \int_{V_\infty \setminus \tau} \text{grad } \varphi(P) \times \overline{A}(P) dV + \int_\tau \text{rot } \overline{A}(P) \varphi(P) d\tau - \\ &- \int_\sigma \hat{n} \times \overline{A}(Q) \varphi(Q) d\sigma, \end{aligned} \quad (4.81)$$

Si noti che al primo termine a destra dell'uguale si è applicata la formula (B.82) valida per tutte le distribuzioni generate da una funzione localmente sommabile, e non la (B.99) perché nessuna ipotesi è stata fatta sul comportamento di $\overline{A}(P)$ in $V_\infty \setminus \Omega$. Peraltro l'integrale di volume esteso a $V_\infty \setminus \tau$ e quello di superficie si annullano per $\varphi(P) \in \mathcal{F}_k, k \subset \tau \setminus \sigma$ perché in tal caso $\varphi(P)$ risulta uguale a zero in $V_\infty \setminus \tau$ e su σ . Dalla (4.81) si ricava pertanto

$$\begin{aligned} \langle [\text{rot } \overline{A} - U_\tau \text{rot } \overline{A}(P)], \varphi \rangle &= 0, \\ \varphi(P) &\in \mathcal{F}_k, k \subset \dot{\tau} \end{aligned} \quad (4.82)$$

¹Dato che le funzioni di Heaviside relative ad un qualsiasi volume sono indefinite sulla superficie che delimita tale volume, è del tutto indifferente scrivere $U_{V_\infty \setminus \dot{\tau}}$ o $U_{V_\infty \setminus \tau}$ nella (4.80); in effetti si ha $\int_{V_\infty} U_{V_\infty \setminus \dot{\tau}}(P) \varphi dV = \int_{V_\infty} U_{V_\infty \setminus \tau}(P) \varphi dV$ dato che le due funzioni integrande tutt'al più differiscono in un insieme di misura nulla in V_∞ .

per cui, ricordando la definizione di valore locale di una distribuzione data in A.2.17 e le (4.14) (4.28) si ha

$$\bar{H}(P) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \bar{A}(P), \quad P \in \dot{\tau}. \quad (4.83)$$

Analogamente, partendo dalle (4.13) (4.37) si giunge a scrivere

$$\bar{E}(P) = \frac{\text{rot rot } \bar{A}(P)}{j\omega\mu\varepsilon} - \frac{\bar{J}[P]}{j\omega\varepsilon}, \quad P \in \dot{\tau}. \quad (4.84)$$

Una espressione alternativa alla (4.84) si può ottenere, sempre in modo analogo, a partire dalla (4.36)

$$\bar{E}(P) = \frac{\text{grad div } \bar{A}(P)}{j\omega\mu\varepsilon} - j\omega\bar{A}(P), \quad P \in \dot{\tau}. \quad (4.85)$$

Dalle (4.83) (4.85) si trae che l'ipotesi che $\bar{A}(P)$ sia derivabile infinite volte nell'aperto $\dot{\tau} = \tau \setminus \sigma$ implica che tale proprietà sia posseduta anche da $\bar{E}(P)$ ed $\bar{H}(P)$. Dalle (4.83) (4.84) si può poi ottenere

$$\text{rot } \bar{H}(P) = j\omega\varepsilon\bar{E}(P) + \bar{J}[P], \quad P \in \dot{\tau} \quad (4.86)$$

e dalle (4.85) (4.83)

$$\text{rot } \bar{E}(P) = -j\omega\mu\bar{H}(P), \quad P \in \dot{\tau}. \quad (4.87)$$

Si osservi infine che dal confronto delle (4.84) (4.85) si trae

$$\begin{aligned} \text{grad div } \bar{A}(P) - \text{rot rot } \bar{A}(P) &= \nabla^2 \bar{A}(P) = \\ &= \sigma^2 \bar{A}(P) - \mu \bar{J}[P], \quad P \in \dot{\tau}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Da quest'ultima discende che la derivabilità infinite volte in $\dot{\tau}$ deve essere verificata anche da $\bar{J}[P]$, ma si noti che nulla si può dire circa il comportamento di $\bar{J}[P]$ al di fuori di $\dot{\tau}$ (in particolare, $\bar{J}[P]$ può non essere definito in $V_\infty \setminus \tau$).

Applicando il principio di dualità si ottengono le formule valide nel caso in cui è $\bar{J} = 0$, $\bar{M} \neq 0$. Dalle (4.83) (4.84) (4.85) (4.87) (4.86) si ha, nell'ordine,

$$\bar{E}(P) = -\frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \bar{F}(P), \quad (4.89)$$

$$\bar{H}(P) = \frac{\text{rot rot } \bar{F}(P)}{j\omega\mu\varepsilon} - \frac{\bar{M}[P]}{j\omega\mu}, \quad (4.90)$$

$$\bar{H}(P) = \frac{\text{grad div } \bar{F}(P)}{j\omega\mu\varepsilon} - j\omega\bar{F}(P), \quad (4.91)$$

$$\text{rot } \bar{H}(P) = j\omega\varepsilon\bar{E}(P), \quad (4.92)$$

$$\text{rot } \bar{E}(P) = -j\omega\mu\bar{H}(P) - \bar{M}[P], \quad (4.93)$$

$$P \in \dot{\tau}.$$

(4.93) sono valide in un aperto $\dot{\tau}$ nel quale $\bar{F}(P)$ è derivabile infinite volte.

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ottengono infine le formule valide nel caso generale: $\bar{J} \neq 0$, $\bar{M} \neq 0$. Utilizzando per $\bar{E}(P)$ le (4.84) (4.89) e per $\bar{H}(P)$ le (4.83) (4.90) si ricava

$$\bar{E}(P) = \frac{\text{rot rot } \bar{A}(P)}{j\omega\mu\varepsilon} - \frac{\bar{J}[P]}{j\omega\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \bar{F}(P), \quad (4.94)$$

$$\bar{H}(P) = \frac{\text{rot rot } \bar{F}(P)}{j\omega\mu\varepsilon} - \frac{\bar{M}[P]}{j\omega\mu} + \frac{1}{\mu} \text{rot } \bar{A}(P), \quad (4.95)$$

$$P \in \dot{\tau},$$

mentre dalle (4.86) (4.92) e dalle (4.87) (4.93) discende

$$\operatorname{rot} \bar{H}(P) = j\omega\varepsilon \bar{E}(P) + \bar{J}[P], \quad (4.96)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E}(P) = -j\omega\mu \bar{H}(P) - \bar{M}[P], \quad (4.97)$$

$$P \in \dot{\tau},$$

se ora con $\bar{E}(P)$ e con $\bar{H}(P)$ si intendono le somme delle intensità di campo elettrico e magnetico sostenute dalle \bar{J} ed \bar{M} separatamente.

Confrontando le (4.1) (4.2) con le (4.96) (4.97) si vede che esse sono formalmente identiche e che la sola differenza risiede nel fatto che le prime valgono dappertutto in V_∞ , mentre le seconde sono soddisfatte soltanto nei punti dell'aperto $\dot{\tau}$. Eseguendo la divergenza delle (4.96) (4.97) si trae anche

$$\operatorname{div} \bar{E}(P) = -\frac{\operatorname{div} \bar{J}[P]}{j\omega\varepsilon}, \quad (4.98)$$

$$\operatorname{div} \bar{H}(P) = -\frac{\operatorname{div} \bar{M}[P]}{j\omega\mu}, \quad (4.99)$$

$$P \in \dot{\tau}.$$

Alla luce di quanto si è detto in questo paragrafo la conoscenza delle intensità $\bar{E}(P)$ e $\bar{H}(P)$ in una regione $\dot{\tau}$ è ricondotta alla ricerca dei potenziali vettori \bar{A} ed \bar{F} associati con le sorgenti elettriche e magnetiche localizzate in tutto V_∞ ed alla verifica della derivabilità infinite volte in $\dot{\tau}$ di $\bar{A}(P)$ ed $\bar{F}(P)$.

4.8 Alcune sorgenti di campo elettromagnetico e relativi potenziali vettori

In quanto segue ci si propone di individuare i potenziali vettori relativi ad alcune distribuzioni \bar{J} ed \bar{M} che sono adatte a descrivere matematicamente sorgenti fisiche importanti dal punto di vista applicativo.

A proposito delle sorgenti \bar{J} ed \bar{M} si dirà che esse sono localizzate nei loro supporti, cioè negli insiemi complementari del massimo insieme aperto nel quale esse si annullano (ciò, ovviamente, implica che la sorgente *non* è localizzata nei punti di V_∞ nei quali il suo valore locale è zero).

4.8.1 Sorgenti puntiformi

Si consideri la distribuzione

$$\bar{J}_Q = \delta_Q \bar{\mathcal{M}}, \quad (4.100)$$

con $\bar{\mathcal{M}}$ vettore costante arbitrario e δ_Q distribuzione di Dirac nel punto Q . Poiché il valore locale di \bar{J}_Q è zero in tutti i punti dell'aperto $V_\infty \setminus Q$, il supporto di tale distribuzione è il punto Q , per cui a \bar{J}_Q viene riservata la denominazione di sorgente elettrica puntiforme, localizzata in Q . Particolarmente semplice è lo studio della sorgente elettrica puntiforme localizzata nell'origine

$$\bar{J}_0 = \delta \bar{\mathcal{M}}, \quad (4.101)$$

il cui potenziale vettore

$$\bar{A}_0 = \bar{A}_0(P) U_{V_\infty} \quad (4.102)$$

soddisfa, per la (3.35), all'equazione

$$\nabla^2 \bar{A}_0 - \sigma^2 \bar{A}_0 = -\mu \bar{\mathcal{M}} \delta. \quad (4.103)$$

Posto

$$\bar{A}_0 = -\mu \bar{\mathcal{M}} \mathcal{E} = -\mu \bar{\mathcal{M}} \mathcal{E}(P) U_{V_\infty}, \quad (4.104)$$

si fa ora l'ipotesi di lavoro che $\mathcal{E}(P)$ sia derivabile infinite volte nell'insieme nel quale non è localizzata la sorgente, cioè nell'aperto $V_\infty \setminus 0$. Dalla (4.88) si trae allora (si tenga presente che $\bar{\mathcal{M}}$ è costante, che con i simboli ora adottati è $\bar{A}(P) = -\mu \bar{\mathcal{M}} \mathcal{E}(P)$ e che $\delta[P] = 0$ per $P \in V_\infty \setminus 0$)

$$\nabla^2 \mathcal{E}(P) - \sigma^2 \mathcal{E}(P) = 0, \quad P \in V_\infty \setminus 0. \quad (4.105)$$

Peraltro per ragioni di simmetria $\mathcal{E}(P)$ può ritenersi funzione soltanto della coordinata r in un sistema di coordinate sferiche (r, ϑ, φ) con origine in 0, per cui la (4.105) si scrive anche

$$\nabla^2 \mathcal{E}(r) - \sigma^2 \mathcal{E}(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\mathcal{E}(r)}{dr} \right] - \sigma^2 \mathcal{E}(r) = 0, \quad (4.106)$$

ovvero

$$r \frac{d^2 \mathcal{E}(r)}{dr^2} + 2 \frac{d\mathcal{E}(r)}{dr} = \sigma^2 r \mathcal{E}(r). \quad (4.107)$$

Ma è

$$\frac{d^2 [r\mathcal{E}(r)]}{dr^2} = r \frac{d^2 \mathcal{E}(r)}{dr^2} + 2 \frac{d\mathcal{E}(r)}{dr} \quad (4.108)$$

e quindi (C costante)

$$r\mathcal{E}(r) = C e^{\pm\sigma r}. \quad (4.109)$$

La soluzione in $+\sigma$ deve essere scartata perché non porterebbe ad un campo soddisfacente le condizioni all'infinito, per cui si conclude che si può scrivere

$$\mathcal{E} = C \frac{e^{-\sigma r}}{r} U_{V_\infty}, \quad (4.110)$$

con C costante che deve essere scelta in modo tale che \bar{A}_0 soddisfi alla (4.103). A tale scopo conviene osservare che si può scrivere

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 \mathcal{E}, \varphi(P) \rangle &= \langle \mathcal{E}, \nabla^2 \varphi(P) \rangle = \\ &= \langle U_{V_\infty}, C \frac{e^{-\sigma r}}{r} \nabla^2 \varphi(P) \rangle = \int_{V_\infty} C \frac{e^{-\sigma r}}{r} \nabla^2 \varphi(P) dV = \\ &= \lim_{V \rightarrow V_\infty, V_0 \rightarrow 0} \int_{V \setminus V_0} C \frac{e^{-\sigma r}}{r} \nabla^2 \varphi(P) dV, \end{aligned} \quad (4.111)$$

essendo V_0 un insieme sferico con centro nell'origine O e $V_0 \subset V$. Peraltro se si indicano con S ed S_0 le superficie che delimitano V e V_0 e si suppone che le loro normali \hat{n} ed \hat{n}_0 siano orientate verso i punti di $V_\infty \setminus V$ e V_0 , rispettivamente, il teorema di Green (B.29) permette di scrivere

$$\begin{aligned} &\lim_{V \rightarrow V_\infty, V_0 \rightarrow 0} \int_{V \setminus V_0} \frac{e^{-\sigma r}}{r} \nabla^2 \varphi(P) dV = \\ &= \lim_{V \rightarrow V_\infty, V_0 \rightarrow 0} \int_{V \setminus V_0} \varphi(P) \nabla^2 \left(\frac{e^{-\sigma r}}{r} \right) dV - \\ &- \lim_{V \rightarrow V_\infty} \int_S \left[\varphi(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-\sigma r}}{r} \right) - \frac{e^{-\sigma r}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(P) \right] dS + \\ &+ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{4\pi} \left[\varphi(P) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-\sigma r}}{r} \right) - \frac{e^{-\sigma r}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(P) \right] r^2 d\Omega, \end{aligned} \quad (4.112)$$

se si tiene conto del fatto che si ha $\hat{r} = -\hat{n}_0$ (e quindi $\frac{\partial}{\partial n_0} = -\frac{\partial}{\partial r}$) nei punti di S_0 , mentre $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ è l'angolo solido elementare. Ricordato che $\varphi(P)$ è una funzione di prova di supporto k compatto (cioè chiuso e limitato), è immediato che facendo tendere V a V_∞ , il contributo dell'integrale esteso ad S si annulla perché finirà sempre con l'essere $S \subset V_\infty \setminus k$ e quindi $\varphi(P)$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial n}(P)$ nulli nei punti di S .

Rimangono pertanto da considerare soltanto gli altri termini nella (4.112). Essendo

$$\nabla^2 \frac{e^{-\sigma r}}{r} = \sigma^2 \frac{e^{-\sigma r}}{r}, \quad (4.113)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-\sigma r}}{r} = -\left(\sigma + \frac{1}{r}\right) \frac{e^{-\sigma r}}{r}, \quad (4.114)$$

$$r \neq 0,$$

dalla (4.112) segue

$$\begin{aligned} \int_{V_\infty} \frac{e^{-\sigma r}}{r} \nabla^2 \varphi(P) dV &= \int_{V_\infty} \sigma^2 \frac{e^{-\sigma r}}{r} \varphi(P) dV - \\ &- \lim_{r \rightarrow 0} \left[(\sigma r + 1) e^{-\sigma r} \int_{4\pi} \varphi(P) d\Omega + r e^{-\sigma r} \int_{4\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial r}(P) d\Omega \right] = \\ &= \sigma^2 \int_{V_\infty} \frac{e^{-\sigma r}}{r} \varphi(P) dV - 4\pi\varphi(0), \end{aligned} \quad (4.115)$$

dato che, essendo $\varphi(P)$ di prova, essa e la sua derivata rispetto ad r si mantengono dappertutto finite e continue, mentre P tende ad O quando r tende a zero. Dalle (4.111) (4.115) si trae

$$\langle \nabla^2 \mathcal{E}, \varphi(P) \rangle = \sigma^2 \langle \mathcal{E}, \varphi(P) \rangle - 4\pi C \langle \delta, \varphi(P) \rangle, \quad (4.116)$$

ovvero

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \sigma^2 \mathcal{E} = -4\pi C \delta, \quad (4.117)$$

per cui la costante C deve essere posta uguale a $-1/(4\pi)$. Di conseguenza dalla (4.110) si trae

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\sigma r}}{r} U_{V_\infty} \quad (4.118)$$

e dalla (4.104)

$$\bar{A}_0 = \frac{\mu}{4\pi} \bar{\mathcal{M}} \frac{e^{-\sigma r}}{r} U_{V_\infty}. \quad (4.119)$$

Per ottenere il potenziale vettore \bar{A}_Q relativo alla sorgente puntiforme localizzata in un punto generico Q , descritta dalla distribuzione (4.100), basta porre $|P - Q|$ al posto di r ; si ha

$$\mathcal{E}_Q = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} U_{V_\infty}, \quad (4.120)$$

così che, per la *sorgente puntiforme elettrica*, localizzata nel punto Q si può scrivere

$$\bar{A}_Q = \bar{A}_Q(P) U_{V_\infty} = \frac{\mu}{4\pi} \bar{\mathcal{M}} \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} U_{V_\infty}. \quad (4.121)$$

Per dualità la *sorgente puntiforme magnetica*, localizzata nel punto Q ($\bar{\mathcal{M}}$ viene sostituito con il vettore $\bar{\mathcal{N}}$ per sottolineare, fra l'altro, che vi è un cambiamento di dimensioni)

$$\bar{M} = \bar{M}_Q = \delta_Q \bar{N} \quad (4.122)$$

dà luogo ad un potenziale vettore elettrico

$$\bar{F}_Q = \bar{F}_Q(P) U_{V_\infty} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \bar{N} \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} U_{V_\infty}. \quad (4.123)$$

Dalle (4.121) (4.123) si trae

$$\bar{A}_Q(P) = \frac{\mu}{4\pi} \bar{M} \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|}, \quad (4.124)$$

$$\bar{F}_Q(P) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \bar{N} \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|}, \quad (4.125)$$

$$P \neq Q,$$

dalle quali segue immediatamente che $\bar{A}_Q(P)$ ed $\bar{F}_Q(P)$ sono derivabili infinite volte in $V_\infty \setminus Q$, in accordo con l'ipotesi di lavoro fatta in precedenza, per cui si può dire che *le formule (4.94) (4.95) sono utilizzabili per ottenere le intensità $\bar{E}(P)$, $\bar{H}(P)$ dovute alle sorgenti puntiformi (4.100) (4.122) nell'aperto $V_\infty \setminus Q$.*

Le intensità di campo $\bar{E}(P)$, $\bar{H}(P)$ dovute ad una sorgente puntiforme soddisfano in $V_\infty \setminus Q$ le (4.96) (4.97) (4.98) (4.99) con $\bar{J}[P] = \bar{M}[P] = 0$.

4.8.2 Correnti volumetriche

Si consideri la distribuzione

$$\bar{J}_V = \bar{J}_V(Q) U_V(Q) U_{V_\infty} = \bar{J}_V(Q) U_V, \quad (4.126)$$

nella quale $\bar{J}_V(Q)$, *densità di corrente elettrica volumetrica*, è una funzione derivabile infinite volte in V aperto, $\bar{V} = V \setminus S'$. La presenza della funzione di Heaviside $U_V(Q)$ relativa al volume V fa sì che la funzione $\bar{J}_V(Q) U_V(Q)$ può presentare discontinuità di prima specie attraverso la superficie S' che delimita V ; inoltre essa assicura che la sorgente è localizzata in V . Il potenziale vettore associato a \bar{J}_V ,

$$\bar{A}_V = \bar{A}_V(P) U_{V_\infty}, \quad (4.127)$$

soddisfa, per la (4.35), all'equazione

$$\nabla^2 \bar{A}_V - \sigma^2 \bar{A}_V = -\mu \bar{J}_V, \quad (4.128)$$

ovvero alla

$$\langle \nabla^2 \bar{A}_V, \varphi \rangle - \langle \sigma^2 \bar{A}_V, \varphi \rangle = -\mu \langle \bar{J}_V, \varphi \rangle. \quad (4.129)$$

Dato che si può scrivere (dV_Q è l'elemento di volume centrato in Q)

$$\begin{aligned} \langle \bar{J}_V, \varphi \rangle &= \int_V \bar{J}_V(Q) \varphi(Q) dV_Q = \\ &= \int_V \bar{J}_V(Q) \langle \delta_Q, \varphi \rangle dV_Q \end{aligned} \quad (4.130)$$

e per il fatto che la (4.128) è lineare si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e scrivere

$$\langle \bar{A}_V, \varphi \rangle = -\mu \int_V \bar{J}_V(Q) \langle \mathcal{E}_Q, \varphi \rangle dV_Q, \quad (4.131)$$

con \mathcal{E}_Q , data dalla (4.120), soluzione della equazione $\nabla^2 \mathcal{E}_Q - \sigma^2 \mathcal{E}_Q = \delta_Q$. Pertanto si può scrivere

$$\begin{aligned} \langle \bar{A}_V, \varphi \rangle &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \bar{J}_V(Q) \int_{V_\infty} \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} \varphi(P) dV_P dV_Q = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \int_{V_\infty} \bar{J}_V(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} \varphi(P) dV_P dV_Q. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Invertendo l'ordine di integrazione si ha allora

$$\langle \bar{A}_V, \varphi \rangle = \int_{V_\infty} \varphi(P) \left[\frac{\mu}{4\pi} \int_V \bar{J}_V(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dV_Q \right] dV_P, \quad (4.133)$$

da cui si trae

$$\bar{A}_V(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \bar{J}_V(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dV. \quad (4.134)$$

Per dualità si ha anche che quando si ha a che fare con una *densità di corrente magnetica volumetrica*, localizzata nel volume V , $\bar{M}_V(Q)$, che permette di definire la sorgente magnetica

$$\bar{M}_V = \bar{M}_V(Q) U_V(Q) U_{V_\infty} = \bar{M}_V(Q) U_V, \quad (4.135)$$

il potenziale vettore è dato da

$$\bar{F}_V = \bar{F}_V(P) U_{V_\infty}, \quad (4.136)$$

con

$$\bar{F}_V(P) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_V \bar{M}_V(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dV. \quad (4.137)$$

Dalle (4.134) (4.137) segue che $\bar{A}_V(P)$ ed $\bar{F}_V(P)$ sono derivabili infinite volte in tutto $V_\infty \setminus S'$ e quindi si può dire che *le formule (4.94) (4.95) sono utilizzabili per ottenere le intensità $\bar{E}(P)$, $\bar{H}(P)$ dovute alle sorgenti volumetriche (4.126) (4.135) nell'aperto $\dot{\tau} = V_\infty \setminus S'$. Le intensità $\bar{E}(P)$, $\bar{H}(P)$ dovute alle sorgenti volumetriche soddisfano le (4.96) (4.97) (4.98) (4.99) in $\dot{\tau} = V_\infty \setminus S'$.*

4.8.3 Correnti superficiali

Si consideri la distribuzione

$$\bar{J}_S = \bar{J}_S(Q) \delta_S, \quad (4.138)$$

nella quale $\bar{J}_S(Q)$, *densità di corrente elettrica superficiale*, è una funzione derivabile infinite volte nell'aperto superficiale che si ottiene privando S del suo bordo l' e nei punti del quale $\bar{J}_S(Q)$ è tangente

²La proprietà è immediata se P è un punto nell'intorno del quale si ha $\bar{J}_V(P) = 0$, perché, essendo certamente $P \neq Q$, è possibile invertire fra loro gli operatori di integrazione e derivazione, ma in tale situazione ci si può portare sempre, anche se si considera un punto $P \in \dot{V}$, perché se si toglie a V un volume sferico V_0 centrato in P , l'integrale (4.137) rimane pressoché invariato. Pertanto rimangono da considerare soltanto i punti di S' , ma per questi ultimi, non essendo definiti i valori locali di \bar{J}_V ed \bar{M}_V , è certo che le (4.94) (4.95) non sono utilizzabili.

ad S . La (4.138) è una sorgente elettrica localizzata sulla superficie S . Il potenziale vettore $\overline{A}_S = \overline{A}_S(P)U_{V_\infty}$ associato a \overline{J}_S si trova in modo analogo a quanto fatto per \overline{A}_V ed è generato dalla funzione

$$\overline{A}_S(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \overline{J}_S(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dS. \quad (4.139)$$

Il principio di dualità permette di introdurre la *densità di corrente magnetica superficiale*, localizzata sulla superficie S e tangente a tale superficie, $\overline{M}_S(Q)$, che definisce la sorgente magnetica

$$\overline{M}_S = \overline{M}_S(Q) \delta_S; \quad (4.140)$$

il potenziale vettore $\overline{F}_S = \overline{F}_S(P)U_{V_\infty}$ associato a tale sorgente è generato dalla funzione

$$\overline{F}_S(P) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_S \overline{M}_S(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dS. \quad (4.141)$$

Dalle (4.139) (4.141) segue che $\overline{A}_S(P)$ ed $\overline{F}_S(P)$ sono derivabili infinite volte per $P \in V_\infty \setminus S$ e quindi che le formule (4.94) (4.95) sono utilizzabili per ottenere le intensità $\overline{E}(P)$, $\overline{H}(P)$ dovute alle sorgenti superficiali (4.138) (4.140) nell'aperto $\dot{\tau} = V_\infty \setminus S$. Le intensità $\overline{E}(P)$, $\overline{H}(P)$ dovute alle sorgenti superficiali soddisfano le (4.96) (4.97) (4.98) (4.99) con $\overline{J}[P] = \overline{M}[P] = 0$ in $\dot{\tau} = V_\infty \setminus S$.

4.8.4 Correnti lineari

Si consideri la distribuzione

$$\overline{J}_l = \overline{J}_l(Q) \delta_l = I(Q) \hat{l} \delta_l, \quad (4.142)$$

nella quale $I(Q)$, *corrente elettrica*, è una funzione derivabile infinite volte nell'aperto che si ottiene privando la linea l dei suoi punti estremi A e B . Nei punti di tale aperto il versore tangente ad l è \hat{l} , versore variabile con continuità lungo l . La sorgente è localizzata sulla linea l . Il potenziale vettore $\overline{A}_l = \overline{A}_l(P)U_{V_\infty}$ associato a \overline{J}_l si trova in modo analogo a quanto fatto per \overline{A}_V ed è generato dalla funzione

$$\overline{A}_l(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_l I(Q) \hat{l} \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dl. \quad (4.143)$$

Il principio di dualità permette di introdurre la *corrente magnetica* nel punto Q della linea l , $K(Q)$, che, a sua volta, definisce la sorgente magnetica

$$\overline{M}_l = \overline{M}_l(Q) \delta_l = K(Q) \hat{l} \delta_l; \quad (4.144)$$

il potenziale vettore $\overline{F}_l = \overline{F}_l(P)U_{V_\infty}$ associato a tale sorgente è generato dalla funzione

$$\overline{F}_l(P) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_l K(Q) \hat{l} \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dl. \quad (4.145)$$

Dalle (4.143) (4.145) segue che $\overline{A}_l(P)$ ed $\overline{F}_l(P)$ sono derivabili infinite volte per $P \in V_\infty \setminus l$ e quindi che le formule (4.94) (4.95) sono utilizzabili per ottenere le intensità dovute alle sorgenti lineari (4.142) (4.144) nell'aperto $\dot{\tau} = V_\infty \setminus l$. Le intensità $\overline{E}(P)$, $\overline{H}(P)$ dovute alle sorgenti lineari soddisfano le (4.96) (4.97) (4.98) (4.99) con $\overline{J}[P] = \overline{M}[P] = 0$ in $\dot{\tau} = V_\infty \setminus l$.

4.8.5 Caso generale

Quanto si è detto in precedenza ed il principio di sovrapposizione degli effetti permettono di affermare che quando sono contemporaneamente presenti sorgenti volumetriche, superficiali, lineari, puntiformi si può scrivere

$$\begin{aligned}\bar{J} &= \bar{J}_V + \bar{J}_S + \bar{J}_l + \bar{J}_Q = \\ &= \bar{J}_V(Q)U_V + \bar{J}_S(Q)\delta_S + I(Q)\hat{l}\delta_l + \sum \bar{\mathcal{M}}\delta_Q,\end{aligned}\quad (4.146)$$

$$\begin{aligned}\bar{M} &= \bar{M}_V + \bar{M}_S + \bar{M}_l + \bar{M}_Q = \\ &= \bar{M}_V(Q)U_V + \bar{M}_S(Q)\delta_S + K(Q)\hat{l}\delta_l + \sum \bar{\mathcal{N}}\delta_Q,\end{aligned}\quad (4.147)$$

relazioni nelle quali il simbolo di sommatoria sta ad indicare che le sorgenti puntiformi possono essere più di una. Si tenga pure presente che gli insiemi V , S , l possono essere l'unione di più insiemi semplicemente connessi e che le sorgenti elettriche e quelle magnetiche interessano insiemi *per ipotesi non coincidenti* (quando è necessario distinguere fra sorgenti elettriche e magnetiche contemporaneamente presenti si sostituirà V_e , S_e , l_e , \hat{l}_e , Q_e o V_m , S_m , l_m , \hat{l}_m , Q_m a V , S , l , \hat{l} , Q).

Per quanto riguarda il potenziale vettore magnetico $\bar{A} = \bar{A}(P)U_{V_\infty}$ associato con la (4.146), dalle (4.124) (4.134) (4.139) (4.143) segue che esso è generato dalla funzione

$$\begin{aligned}\bar{A}(P) &= \bar{A}_V(P) + \bar{A}_S(P) + \bar{A}_l(P) + \bar{A}_Q(P) = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \bar{J}_V(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dV + \frac{\mu}{4\pi} \int_S \bar{J}_S(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dS + \\ &+ \frac{\mu}{4\pi} \int_l I(Q) \hat{l} \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dl + \sum \frac{\mu}{4\pi} \bar{\mathcal{M}} \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|},\end{aligned}\quad (4.148)$$

mentre per il potenziale vettore elettrico $\bar{F} = \bar{F}(P)U_{V_\infty}$ associato con la (4.147) vale la relazione

$$\begin{aligned}\bar{F}(P) &= \bar{F}_V(P) + \bar{F}_S(P) + \bar{F}_l(P) + \bar{F}_Q(P) = \\ &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_V \bar{M}_V(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dV + \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_S \bar{M}_S(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dS + \\ &+ \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_l K(Q) \hat{l} \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dl + \sum \frac{\varepsilon}{4\pi} \bar{\mathcal{N}} \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|}.\end{aligned}\quad (4.149)$$

posto Per quanto si è visto nei sottoparagrafi precedenti 4.8.1, 3.8.2, 4.8.3, 4.8.4, indicato con I l'insieme dei punti nei quali sono localizzate le discontinuità dei generatori volumetrici ed i generatori superficiali, lineari, puntiformi (cioè, se E è l'insieme dei punti isolati nei quali sono presenti sorgenti puntiformi, $I = S' \cup S \cup l \cup E$) si ha

$$\text{rot } \bar{H}(P) = j\omega\varepsilon\bar{E}(P) + \bar{J}(P), \quad (4.150)$$

$$\text{rot } \bar{E}(P) = -j\omega\mu\bar{H}(P) - \bar{M}(P), \quad (4.151)$$

$$P \in V_\infty \setminus I$$

ed $\bar{E}(P)$, $\bar{H}(P)$ sono fornite dalle (4.94) (4.95) in $\dot{\tau} = V_\infty \setminus I$. Tenendo presente quanto detto in 4.6, ai termini noti (4.146) (4.147) o ad una parte di essi è sempre possibile sostituirci altri del tipo $\left(\frac{\text{rot } \bar{J}}{j\omega\varepsilon}\right)$, $\left(\frac{\text{rot } \bar{M}}{j\omega\mu}\right)$, $\left(-\frac{\text{rot rot } \bar{J}}{\omega^2\mu\varepsilon}\right)$, $\left(-\frac{\text{rot rot } \bar{M}}{\omega^2\mu\varepsilon}\right)$ e così via. è tuttavia interessante osservare che, almeno in linea di principio, è sempre possibile risalire a sorgenti del tipo (4.146) (4.147) per cui nel seguito,

salvo avviso contrario, *si supporrà sempre che le sorgenti siano esclusivamente di tale tipo*. Tenendo presente quanto detto in precedenza circa la derivabilità dei potenziali vettori e quindi di $\bar{E}(P)$, $\bar{H}(P)$ si può quindi dire che da ora innanzi le intensità $\bar{E}(P)$, $\bar{H}(P)$ verranno supposte derivabili infinite volte nell'aperto $V_\infty \setminus I$ se I è l'insieme unione delle superficie, delle linee e dei punti nei quali sono localizzate, rispettivamente, sorgenti superficiali, lineari, puntiformi, nonchè delle superficie in corrispondenza delle quali sono discontinue le densità di corrente volumetriche.

4.9 Correnti superficiali e lineari come limiti di correnti volumetriche

Nei paragrafi precedenti si sono introdotti i concetti matematici di sorgenti superficiali e lineari in un modo formale, per cui è utile cercare una loro connessione con il mondo fisico, nel quale, tuttavia, *non esistono* sorgenti di tale tipo (tutte le sorgenti fisiche sono sorgenti volumetriche). Peraltro ciò è facilmente raggiungibile perché basta interpretare le correnti superficiali come il limite di una corrente volumetrica localizzata in una lamina di spessore h tendente a zero e quelle lineari come il limite di una corrente volumetrica localizzata in un filo la cui sezione trasversale è un cerchio di raggio a tendente a zero. In tutti e due i casi il limite deve essere fatto a valore costante della corrente attraversante una qualsiasi sezione trasversale della lamina o del filo per cui le densità di volume $\bar{J}_V(P)$ o $\bar{M}_V(P)$ debbono divergere in guisa tale che $\bar{J}_V(P)h$ o $\bar{M}_V(P)h$ e $\bar{J}_V(P)a^2$ o $\bar{M}_V(P)a^2$ si mantengano costanti. L'interpretazione ora data delle sorgenti superficiali e lineari permette di estendere a queste sorgenti alcune definizioni e proprietà valide per le sorgenti volumetriche. Si incominci col considerare la corrente volumetrica che attraversa una superficie S' (chiusa o aperta) di normale \hat{n}' ; si ha, per definizione,

$$I = \int_{S'} \bar{J}_V(P) \cdot \hat{n}' dS. \quad (4.152)$$

Se si ha a che fare con una lamina che per h tendente a zero si riduce ad una superficie S , si supponga che S' sia la intersezione della lamina stessa con una superficie che interseca S lungo una linea g , nei punti della quale la normale ad S è tangente ad S' . Al tendere a zero dello spessore h l'intersezione S' tende a divenire la linea g ed \hat{n}' può essere sostituito con il versore \hat{v} ortogonale a g e tangente ad S , mentre $\bar{J}_V(P)$ tende a divenire tangente ad S perché le cariche elettriche per h tendente a zero finiscono col potersi muovere soltanto parallelamente ad S . Posto

$$\bar{J}_S(Q) = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{J}_V(P)h, \quad (4.153)$$

si ha allora

$$I = \int_g \bar{J}_S(Q) \cdot \hat{v}(Q) dg, \quad (4.154)$$

relazione che può essere assunta come definizione di corrente superficiale attraversante la linea g localizzata sulla superficie S , sede della sorgente superficiale, che ammette $\hat{v}(Q)$ come sua normale giacente nel piano tangente ad S .

Se si ha invece a che fare con un filo che si riduce ad una linea C al tendere a zero del raggio a della sua sezione trasversale, si supponga che S' sia la intersezione del filo stesso con la superficie trasversale che incontra C nel punto Q . Al tendere a zero del raggio a l'intersezione S' tende a divenire il punto Q ed \hat{n}' può essere assunto coincidente con \hat{l} , tangente alla linea C , mentre le cariche elettriche per a tendente a zero finiscono col potersi muovere soltanto lungo C . Posto

$$I(Q)\hat{l} = \lim_{a \rightarrow 0} \bar{J}_V(P)S', \quad (4.155)$$

si ha allora

$$I = I(Q), \quad (4.156)$$

che può essere assunta come definizione di corrente lineare che attraversa il punto Q , con direzione di riferimento quella del versore \hat{l} .

Analoghe considerazioni valgono per le sorgenti magnetiche, nel qual caso le formule si traggono da quelle precedenti applicando il principio di dualità.

Alla luce delle definizioni date si consideri ora il principio di conservazione della carica. In presenza di sole correnti elettriche volumetriche si ha, per la (3.18),

$$\operatorname{div} [\gamma \bar{E}(P) + \bar{J}_V(P)] = -j\omega \rho_V(P), \quad (4.157)$$

ovvero, per il teorema di Gauss (B.17) (S' è la superficie chiusa delimitante il volume V , avente \hat{n}' come normale orientata verso l'esterno),

$$\int_{S'} \bar{J}_V(P) \cdot \hat{n}' dS' + \int_{S'} \gamma \bar{E}(P) \cdot \hat{n}' dS' = -j\omega \int_V \rho_V(P) dV = -j\omega q; \quad (4.158)$$

tenendo presenti le (4.154) (4.156), la (4.158) si estende al caso in cui la superficie S' interseca anche alcune superficie S , sedi di correnti superficiali di densità $\bar{J}_S(P)$, secondo una linea g (eventualmente unione di più linee, una per ogni S) ed alcune linee C_i ($i = 1, \dots, r$) sedi di correnti lineari di densità $I_i(P) \hat{l}_i$ in alcuni punti Q_i ; si ha

$$\begin{aligned} & \int_{S'} \bar{J}_V(P) \cdot \hat{n}' dS' + \int_{S'} \gamma \bar{E}(P) \cdot \hat{n}' dS' + \\ & + \int_g \bar{J}_S(Q) \cdot \operatorname{sgn}(\hat{\nu} \cdot \hat{n}') \hat{\nu} dg + \sum_{i=1}^r \operatorname{sgn}(\hat{l}_i \cdot \hat{n}') I_i(Q_i) = -j\omega q, \end{aligned} \quad (4.159)$$

nella quale $I_i(Q_i)$ è la corrente relativa alla linea i -esima nel punto Q_i , e le funzioni $\operatorname{sgn}(\hat{\nu} \cdot \hat{n}')$ e $\operatorname{sgn}(\hat{l}_i \cdot \hat{n}')$ valgono 1 quando il prodotto scalare entro parentesi è positivo, e -1 nel caso contrario.

Dalla (4.159) si trae, in particolare, che se in presenza di sole correnti lineari non è possibile un accumulo di carica entro la superficie S' (come avviene in corrente continua) o tale accumulo è trascurabile (come avviene a bassa frequenza se S' non separa le armature di un condensatore) si ha

$$\sum_{i=1}^r \operatorname{sgn}(\hat{l}_i \cdot \hat{n}') I_i(Q_i) = 0. \quad (4.160)$$

Nelle ipotesi fatte le $I_i(Q_i)$ sono costanti lungo le linee C_i e la (4.160) è una nota relazione della teoria dei circuiti, conosciuta come *legge di Kirchhoff* per i nodi: *la somma delle correnti entranti nella superficie S' , e quindi nel nodo, è uguale alla somma delle correnti uscenti.*

4.10 Teorema di Poynting generalizzato

Ci si propone di generalizzare il teorema di Poynting considerato nel Capitolo 2. Si supponga dapprima che nella regione V_0 , delimitata dalla superficie S_0 di normale \hat{n}_0 orientata verso $V_\infty \setminus V_0$ siano localizzati soltanto generatori volumetrici di densità $\bar{J}_V(P)U_{V_e}(P)$ e $\bar{M}_V(P)U_{V_m}(P)$, con V_e e V_m disgiunti. Rispetto alla situazione considerata nel Capitolo 2 vi è la differenza che ora sono presenti anche generatori magnetici e che le densità di corrente presentano, in generale, discontinuità in corrispondenza delle superficie S'_e ed S'_m che delimitano V_e e V_m . Indicato con $I = S'_e \cup S'_m$ l'insieme dei punti delle superficie S'_e ed S'_m , le intensità $\bar{E}(P)$, $\bar{H}(P)$ soddisfano alle equazioni di Maxwell (3.97) (3.98) in ogni aperto $\dot{\tau} \subseteq V_0 \setminus I$; pertanto da tali equazioni, con procedura del tutto simile a quella seguita in 3.3 e

mettendo in evidenza la presenza di perdite nel mezzo ($\gamma \neq 0$), si giunge a scrivere ($\hat{\nu}$ è la normale alla superficie σ che delimita τ , orientata verso i punti di $V_\infty \setminus \tau$)

$$\begin{aligned}
 & - \int_{V_e \cap \tau} \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{J}_V^*(P)}{2} dV - \int_{V_m \cap \tau} \frac{\overline{H}^*(P) \cdot \overline{M}_V(P)}{2} dV = \\
 & = \int_\sigma \frac{\overline{E}(Q) \times \overline{H}^*(Q)}{2} \cdot \hat{\nu} d\sigma + \\
 & + 2j\omega \int_\tau \left[\mu \frac{\overline{H}(P) \cdot \overline{H}^*(P)}{4} - \varepsilon \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{E}^*(P)}{4} \right] d\tau + \\
 & + \int_\tau \gamma \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{E}^*(P)}{2} d\tau. \tag{4.161}
 \end{aligned}$$

Si noti che in generale il campo di intensità $\overline{E}(P)$, $\overline{H}(P)$ è sostenuto, oltre che dai generatori $\overline{J}_V(P)U_{V_e}$, $\overline{M}_V(P)U_{V_m}$, localizzati in V_0 , anche da altri generatori, del tutto arbitrari, localizzati all'esterno di S_0 . Se si fa tendere $\dot{\tau}$ a $\dot{V}_0 \setminus I$, cioè σ a $S_0 \cup I = S_0 \cup S'_m \cup S'_e$, $V_e \cap \tau$ tende a \dot{V}_e e $V_m \cap \tau$ a \dot{V}_m , mentre il primo integrale a secondo membro nella (4.161) si riduce al flusso del vettore di Poynting attraverso la sola S_0 , perché per quanto riguarda S'_e ed S'_m , σ va ad adagiarsi sulle due facce di ciascuna di esse, per cui il flusso del vettore di Poynting risulta complessivamente nullo. Di conseguenza, tenendo presente che due integrali estesi ad insiemi che differiscono soltanto per un insieme di misura nulla sono uguali, si ha

$$\begin{aligned}
 & - \int_{V_e} \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{J}_V^*(P)}{2} dV - \int_{V_m} \frac{\overline{H}^*(P) \cdot \overline{M}_V(P)}{2} dV = \\
 & = \int_{S_0} \frac{\overline{E}(Q) \times \overline{H}^*(Q)}{2} \cdot \hat{n}_0 dS + \\
 & + 2j\omega \int_{V_0} \left[\mu \frac{\overline{H}(P) \cdot \overline{H}^*(P)}{4} - \varepsilon \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{E}^*(P)}{4} \right] dV + \\
 & + \int_{V_0} \gamma \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{E}^*(P)}{2} dV. \tag{4.162}
 \end{aligned}$$

Si passi ora a considerare il caso in cui entro V_0 vi sia soltanto un generatore superficiale elettrico $\overline{J}_S(Q)\delta_{S_e}$, localizzato su una superficie S_e , mentre la situazione all'esterno di S_0 è ancora arbitraria. Indicate con σ^- e σ^+ due superficie chiuse delimitanti due volumi τ_1 e τ_2 tali che nell'intercapedine $\tau_2 \setminus \tau_1$ sia racchiuso il generatore \overline{J}_S (fig. 4.2), si indichi con τ l'insieme $(V_0 \setminus \tau_2) \cup \tau_1$, cioè l'insieme V_0 al quale è stata sottratta l'intercapedine compresa fra σ^- e σ^+ . Così facendo ci si assicura che S_e non appartiene a τ e quindi che $\overline{E}(P)$ ed $\overline{H}(P)$ sono derivabili infinite volte in τ stesso per cui è possibile scrivere ($\sigma = S_0 \cup \sigma^- \cup \sigma^+$, $\hat{\nu}$ normale a σ orientata come in fig. 4.2)

$$\begin{aligned}
 0 & = \int_\sigma \frac{\overline{E}(P) \times \overline{H}^*(P)}{2} \cdot \hat{\nu} d\sigma + \\
 & + 2j\omega \int_\tau \left[\mu \frac{\overline{H}(P) \cdot \overline{H}^*(P)}{4} - \varepsilon \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{E}^*(P)}{4} \right] d\tau + \\
 & + \int_\tau \gamma \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{E}^*(P)}{2} d\tau \tag{4.163}
 \end{aligned}$$

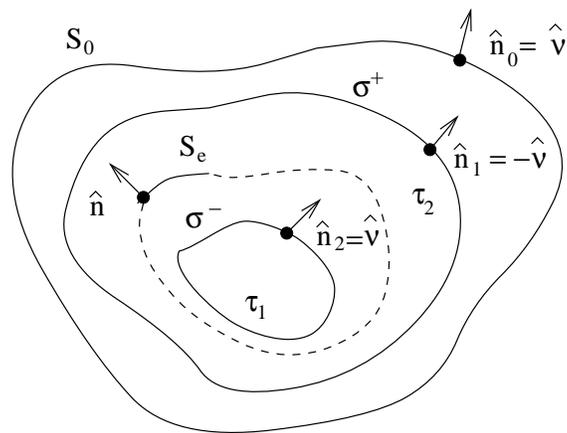


Figura 4.2: Calcolo della potenza complessa erogata da una sorgente elettrica superficiale.

e facendo tendere σ^- e σ^+ alle due facce di S_e

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{S_0} \frac{\overline{E}(P) \times \overline{H}^*(P)}{2} \cdot \hat{n}_0 dS - \int_{\sigma^+} \frac{\overline{E}(P^+) \times \overline{H}^*(P^+)}{2} \cdot \hat{n}_1 d\sigma + \\
 &+ \int_{\sigma^-} \frac{\overline{E}(P^-) \times \overline{H}^*(P^-)}{2} \cdot \hat{n}_2 d\sigma + \\
 &+ 2j\omega \int_{\tau} \left[\mu \frac{\overline{H}(P) \cdot \overline{H}^*(P)}{4} - \varepsilon \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{E}^*(P)}{4} \right] d\tau + \\
 &+ \int_{\tau} \gamma \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{E}^*(P)}{2} d\tau.
 \end{aligned} \tag{4.164}$$

Il flusso attraverso $\sigma^+ \cup \sigma^-$ è la potenza complessa erogata dal generatore $\overline{J}_S(Q) \delta_{S_e}$, dato che nell'intercapedine fra σ^+ e σ^- non vi sono altri generatori, mentre al tendere di σ^+ e σ^- ad S_e , cioè di $\tau_2 \setminus \tau_1$ ad un insieme di misura nulla, tendono a zero sia l'energia immagazzinata nell'intercapedine sotto forma elettromagnetica, sia quella ivi dissipata in calore. Peraltro, per quanto verrà in seguito dimostrato (si vedano le (5.19) (5.20)), si può scrivere

$$\begin{aligned}
 &\int_{\sigma^+} \frac{\overline{E}(P^+) \times \overline{H}^*(P^+)}{2} \cdot \hat{n}_1 d\sigma - \int_{\sigma^-} \frac{\overline{E}(P^-) \times \overline{H}^*(P^-)}{2} \cdot \hat{n}_2 d\sigma = \\
 &= \int_{S_e} \frac{\overline{E}(P) \cdot [\overline{H}^*(P^+) - \overline{H}^*(P^-)] \times \hat{n}}{2} dS = \\
 &= - \int_{S_e} \frac{\overline{E}(Q) \cdot \overline{J}_S(Q)}{2} dS.
 \end{aligned} \tag{4.165}$$

Quest'ultima espressione va ad aggiungersi al primo membro della (4.162) quando è presente entro V_0 anche $\overline{J}_S(Q) \delta_{S_e}$.

Se entro V_0 è localizzato soltanto un generatore superficiale magnetico $\overline{M}_S(Q) \delta_{S_m}$, in modo del tutto analogo si ottiene che a primo membro della (4.162) compare il termine

$$- \int_{S_m} \frac{\overline{H}^*(Q) \cdot \overline{M}_S(Q)}{2} dS. \tag{4.166}$$

Si deve osservare che le due superficie S_e ed S_m sono considerate sempre disgiunte ($S_e \cap S_m = 0$), per cui quando si parla di correnti superficiali elettriche e magnetiche localizzate sulla stessa superficie S (come si farà in seguito nel teorema di equivalenza ed in quello di induzione), in realtà *si deve intendere che vi è una corrente superficiale elettrica localizzata su di una superficie S_e ed una corrente superficiale magnetica localizzata su di una superficie S_m , con S_e ed S_m prossime quanto si vuole ad S , ma sempre fra loro disgiunte.*

Alle (4.165) (4.166) si può giungere in modo più spedito applicando il procedimento di passaggio al limite visto nel paragrafo 4.9 e partendo da densità di corrente volumetrica.

Altrettanto può dirsi nel caso di correnti lineari per le quali si ottiene che la potenza complessa erogata da chi è responsabile delle correnti impresse è data da

$$- \int_{l_e} \frac{\overline{E}(Q) \cdot \hat{l}_e I^*(Q)}{2} dl \tag{4.167}$$

nel caso delle correnti lineari elettriche e da

$$- \int_{l_m} \frac{\overline{H}^*(Q) \cdot \hat{l}_m K(Q)}{2} dl \tag{4.168}$$

in quello delle correnti lineari magnetiche. Anche i due contributi (4.167) (4.168) vanno ad aggiungersi a primo membro della (4.162) per cui, in definitiva, quando sono presenti generatori di tutti i tipi si ha

$$\begin{aligned}
& - \int_{V_e} \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{J}_V^*(P)}{2} dV - \int_{V_m} \frac{\overline{H}^*(P) \cdot \overline{M}_V(P)}{2} dV - \\
& - \int_{S_e} \frac{\overline{E}(Q) \cdot \overline{J}_S^*(Q)}{2} dS - \int_{S_m} \frac{\overline{H}^*(Q) \cdot \overline{M}_S(Q)}{2} dS - \\
& - \int_{l_e} \frac{\overline{E}(Q) \cdot \hat{l}_e I^*(Q)}{2} dl - \int_{l_m} \frac{\overline{H}^*(Q) \cdot \hat{l}_m K(Q)}{2} dl = \\
& = \int_{S_0} \frac{\overline{E}(P) \times \overline{H}^*(P)}{2} \cdot \hat{n}_0 dS + \int_{V_0} \gamma \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{E}^*(P)}{2} dV + \\
& + 2j\omega \int_{V_0} \left[\mu \frac{\overline{H}(P) \cdot \overline{H}^*(P)}{4} - \varepsilon \frac{\overline{E}(P) \cdot \overline{E}^*(P)}{4} \right] dV, \tag{4.169}
\end{aligned}$$

espressione che generalizza il teorema di Poynting al caso in cui siano presenti in V_0 correnti impresse volumetriche, superficiali, lineari, sia elettriche, sia magnetiche.

Si può osservare che gli integrali superficiali e di linea che compaiono a primo membro nella (4.169) sono in realtà una parte del flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie σ , per cui in definitiva ed a stretto rigor di termini il teorema di Poynting generalizzato differisce da quello considerato al Capitolo 2 soltanto per il fatto che le sorgenti volumetriche possono presentare discontinuità.

Prima di abbandonare l'argomento, è interessante osservare che se nel caso delle correnti lineari si esprime il campo elettromagnetico come sovrapposizione di due campi, il primo di intensità $\overline{E}'(P)$ dovuto alla sorgente lineare in considerazione ed il secondo di intensità $\overline{E}''(P)$ sostenuto dalle sorgenti esterne ad S_0 , la potenza complessa erogata dalle forze impresse responsabili della corrente lineare contro il campo $\overline{E}''(P)$ è senz'altro calcolabile con la formula (le coordinate di P sono quelle tubolari)

$$- \int_{\mathcal{C}} \frac{\overline{E}''(P) \cdot \hat{l}(s) I^*(s)}{2} dS, \quad P = P(0, 0, s), \tag{4.170}$$

mentre altrettanto non può dirsi per la potenza complessa erogata per far fronte al campo $\overline{E}'(P)$. Quest'ultimo, infatti, diverge nei punti della linea \mathcal{C} e quindi la scrittura

$$- \int_{\mathcal{C}} \frac{\overline{E}'(P) \cdot \hat{l}(s) I^*(s)}{2} dl, \quad P = P(0, 0, s) \tag{4.171}$$

è da interpretarsi come scrittura semplificata di quella corretta, nella quale compare esplicitamente l'indicazione che si tratta del limite della potenza complessa erogata da un generatore volumetrico.

Sotto questo punto di vista è particolarmente utile ricorrere, anche in questo caso, al flusso del vettore di Poynting attraverso una superficie σ che racchiuda la linea \mathcal{C} ed i cui punti tendano alla linea \mathcal{C} stessa. Una superficie σ del tipo ora descritto può essere costituita da una porzione σ_l di una superficie coordinata s del sistema di coordinate tubolari associato con la linea \mathcal{C} , chiusa alle estremità da due superfici σ_1 e σ_2 . Le aree di σ_1 e σ_2 tendono a zero al tendere a zero del raggio a della sezione trasversale (che è una circonferenza) della superficie σ_l e quindi, per a molto piccoli, danno un contributo trascurabile al flusso del vettore di Poynting che di conseguenza si riduce a quello attraverso σ_l ; la potenza complessa in considerazione si scrive allora

$$\int_{\sigma_l} \frac{\overline{E}(P) \times \overline{H}^*(P)}{2} \cdot \hat{r} d\sigma_l, \quad P \in \sigma_l, \tag{4.172}$$

con \hat{r} il versore relativo alla curva coordinata r in coordinate tubolari. In accordo con il principio di conservazione dell'energia, la parte reale della (4.172), potenza attiva, deve essere indipendente dalla particolare superficie che racchiude la sorgente, e quindi, a parità del valore della corrente che attraversa la sezione trasversale del filo, risulterà indipendente dal raggio a della sezione trasversale di σ_l . Al contrario per la parte immaginaria non si potrà passare al limite e si dovrà fare il calcolo con un valore finito di a .

4.11 Teorema di unicità generalizzato

Tenendo presente che gli integrali superficiali e di linea nella (4.169) altro non sono che una parte del flusso del vettore di Poyntig attraverso la superficie σ , con procedimento del tutto simile a quello seguito nel Capitolo 2 si può dimostrare il teorema di unicità generalizzato, il quale afferma che in una regione limitata V le intensità del campo $\bar{E}(P)$, $\bar{H}(P)$ sono univocamente fissate dai generatori (volumetrici, superficiali, lineari) localizzati entro V e dalle condizioni al contorno ($\bar{E}(Q)$ tangente o $\bar{H}(Q)$ tangente nei punti della superficie S' che delimita V), quando il mezzo presenta una conducibilità piccola quanto si vuole, ma diversa da zero. Anche in questo caso quando si passa a considerare tutto lo spazio V_∞ le condizioni al contorno vengono sostituite dalle condizioni all'infinito

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \bar{E}(P) = 0, \quad (4.173)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \bar{H}(P) = 0, \quad (4.174)$$

con $r = |P - O|$ distanza del punto di osservazione P dall'origine O posta in un punto arbitrario al finito.

4.12 Densità di carica elettrica e magnetica

L'equazione di continuità (4.21) permette di associare alla distribuzione \bar{J} , densità di corrente elettrica impressa, una distribuzione densità di carica elettrica ρ che in assenza di perdite ($\gamma = 0$) è data da

$$\rho = -\frac{\text{div } \bar{J}}{j\omega}. \quad (4.175)$$

Per giungere alla espressione generale di ρ conviene considerare separatamente i vari addendi del secondo membro della (4.146) e poi applicare, al solito, il principio di sovrapposizione degli effetti.

4.12.1 Cariche volumetriche

Quando è

$$\bar{J} = \bar{J}_V = \bar{J}_V(P)U_V(P)U_{V_\infty} = \bar{J}_V(P)U_V, \quad (4.176)$$

dalla (B.103), tenendo presente che è $\bar{J}_V(P)U_V(P) = 0$ per $P \in V_\infty \setminus V$, si ha

$$\begin{aligned} \text{div } \bar{J} &= \text{div } \bar{J}_V = U_V \text{div } \bar{J}_V(P) - \hat{n}' \cdot \bar{J}_V(P^-) \delta_{S'}, \\ &P^- \rightarrow Q \in S', \end{aligned} \quad (4.177)$$

con \hat{n}' , normale alla superficie S' che delimita V , orientata verso i punti di $V_\infty \setminus V$. Dalla (4.175) discende

$$\rho = \rho_V(P)U_V + \rho_S(P)\delta_{S'} = -\frac{\text{div } \bar{J}_V(P)}{j\omega}U_V + \frac{\hat{n}' \cdot \bar{J}_V(P^-)}{j\omega}\delta_{S'}, \quad (4.178)$$

cioè

$$\rho_V(P) = -\frac{\operatorname{div} \bar{J}_V(P)}{j\omega}, \quad P \in \dot{V} = V \setminus S', \quad (4.179)$$

$$\rho_S(Q) = \frac{\hat{n}' \cdot \bar{J}_V(P^-)}{j\omega}, \quad P^- \rightarrow Q \in S'. \quad (4.180)$$

Si può osservare che mentre la (4.179) non porta nuove informazioni, dato che essa altro non è che l'equazione di continuità all'interno di S' (dove la $\bar{J}_V(P)$ è, per ipotesi, derivabile infinite volte e quindi ammette divergenza) la (4.180) è particolarmente importante sotto questo punto di vista. Infatti essa informa che la discontinuità della densità di corrente elettrica di volume $\bar{J}_V(P)U_V(P)$ in corrispondenza della superficie S' che delimita il volume V è accompagnata da una densità di carica superficiale dipendente dalla sola discontinuità della componente secondo la normale \hat{n}' a S' . Ciò peraltro era prevedibile perché una discontinuità della componente di $\bar{J}_V(P)$ tangente ad S' non richiede alcun *tamponamento* di cariche dato che le cariche elettriche associate a tale componente non tendono ad accumularsi su o ad allontanarsi da S' , ma scorrono parallelamente a tale superficie. Al contrario la discontinuità della componente normale di $\bar{J}_V(P)U_V(P)$ deve essere associata ad una densità di carica superficiale in grado di assorbire o fornire le cariche che $\hat{n}' \cdot \bar{J}_V(P^-)$ convoglia da o verso l'interno di S' . Se anziché con le grandezze complesse si opera con quelle reali, funzioni del tempo oltre che del punto, la (4.180) porta a scrivere

$$\frac{\partial \rho_{\sim S}(Q, t)}{\partial t} = \hat{n}' \cdot \bar{J}_{\sim V}(P^-, t), \quad (4.181)$$

relazione che permette di affermare che se $\hat{n}' \cdot \bar{J}_{\sim V}(P^-, t)$ è positivo (cioè le cariche positive si muovono verso S' provenendo dall'interno di V) la carica che risiede su una porzione di S' di area unitaria centrata in Q aumenta nell'unità di tempo di $\hat{n}' \cdot \bar{J}_{\sim V}(P^-, t)$, cioè della carica che (sempre nell'unità di tempo) attraversa (muovendosi verso S') una superficie unitaria situata entro \dot{V} , prossima quanto si vuole alla porzione di S' sopra considerata; viceversa, se $\hat{n}' \cdot \bar{J}_{\sim V}(P^-, t)$ è negativo.

4.12.2 Cariche superficiali

Qualora si consideri una corrente elettrica superficiale di densità $\bar{J} = \bar{J}_S(Q)\delta_S$, dove il vettore $\bar{J}_S(Q)$ è diretto parallelamente alla superficie S , mentre la superficie S supporto di δ_S è in generale aperta con bordo l' , l'utilizzo della (B.108) fornisce

$$\rho = -\frac{1}{j\omega} \{ \delta_S \operatorname{div}_S [\bar{J}_S(Q)] - \delta_{l'} \hat{\nu} \cdot \bar{J}_S(Q^-) \},$$

$$Q \in \dot{S} = S \setminus l', \quad Q^- \rightarrow Q_{l'} \in l', \quad (4.182)$$

Dalla (4.182) discende

$$\rho = \rho_S(Q)\delta_S + \rho_{l'}(Q)\delta_{l'} =$$

$$- \frac{\operatorname{div}_S \bar{J}_S(Q)}{j\omega} \delta_S + \frac{\hat{\nu} \cdot \bar{J}_S(Q^-)}{j\omega} \delta_{l'}, \quad (4.183)$$

cioè

$$\rho_S(Q) = -\frac{\operatorname{div}_S \bar{J}_S(Q)}{j\omega}, \quad Q \in \dot{S} = S \setminus l', \quad (4.184)$$

$$\rho_{l'}(Q_{l'}) = \frac{\hat{\nu} \cdot \bar{J}_S(Q^-)}{j\omega}, \quad Q^- \rightarrow Q_{l'} \in l'. \quad (4.185)$$

La (4.184) è l'equazione di continuità in $\dot{S} = S \setminus l'$, mentre la $\rho_{l'}(Q_{l'})$ tampona le cariche che tendono ad attraversare l' . La $\rho_{l'}(Q_{l'})$ viene a mancare se la superficie S è chiusa.

4.12.3 Cariche lineari

Se si prende in esame una distribuzione lineare di corrente elettrica $\bar{J} = \bar{J}_l = I(Q)\hat{l}\delta_l$, dove la linea l supporto di δ_l è in generale aperta con estremi A e B , tramite la (B.111) si ha (B^- ed A^- sono due punti di $\hat{l} = l \setminus (A \cup B)$ che si avvicinano indefinitamente agli estremi B ed A , rispettivamente)

$$\rho = -\frac{1}{j\omega} \left\{ \delta_l \frac{\partial}{\partial s} [I(Q)] - \delta_B I(B^-) + \delta_A I(A^-) \right\}$$

$$Q \in \hat{l} = l \setminus (A \cup B), \quad B^- \rightarrow B, \quad A^- \rightarrow A. \quad (4.186)$$

Dalla (4.186) discende

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_l(Q)\delta_l + q_A\delta_A + q_B\delta_B = \\ &= -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial I(Q)}{\partial s} \delta_l + \frac{I(B^-)}{j\omega} \delta_B - \frac{I(A^-)}{j\omega} \delta_A, \end{aligned} \quad (4.187)$$

cioè

$$\rho_l(Q) = \frac{-1}{j\omega} \frac{\partial I(Q)}{\partial s}, \quad Q \in \hat{l} = l \setminus (A \cup B), \quad (4.188)$$

$$q_A = \frac{-I(A^-)}{j\omega}, \quad A^- \rightarrow A, \quad (4.189)$$

$$q_B = \frac{I(B^-)}{j\omega}, \quad B^- \rightarrow B. \quad (4.190)$$

In questo caso la (4.188) è l'equazione di continuità nei punti interni della linea l , mentre le cariche puntiformi q_A e q_B sono quelle che alle due estremità della linea l tamponano le cariche che muovendosi su l danno luogo alla corrente $I(Q)$. Le cariche q_A e q_B vengono a mancare se la linea è chiusa. Si può osservare che $I(B^-)$ ed $I(A^-)$ nelle (4.189) (4.190) sono i valori limite che la corrente assume quando si tende a B o ad A , provenendo dall'interno di l . Ovviamente, se q_A e q_B sono nulli, è anche $I(B^-) = I(A^-) = 0$. Ciò avviene nel caso di un filo estremamente sottile, terminato bruscamente, perché le cariche non hanno modo di "fermarsi" sulle superficie terminali del filo; nella pratica per avere un valore di corrente non nullo alle estremità di un filo molto sottile si aumentano artificialmente le "aree di parcheggio" per le cariche alle estremità del filo ponendo in corrispondenza di queste ultime o sfere, o piastre, o, in generale, sistemi metallici relativamente compatti (detti anche *capacità terminali*).

Tipico esempio di quanto si è detto è l'*oscillatore di Hertz*, il primo generatore di onde elettromagnetiche [4] realizzato dall'uomo (fig. 4.3). Al centro di esso si distinguono due sferette fra le quali una tensione sufficientemente elevata fa scoccare una scintilla, che altro non è che una corrente di convezione, che può essere interpretata come una corrente impressa. Essa induce una corrente di conduzione nei sottili cilindri conduttori che collegano le sfere piccole a quelle grandi, sulle quali due cariche q_A e $q_B = -q_A$ hanno il compito di tamponare la corrente $I(Q)$, che per la loro presenza può assumere un valore pressoché costante al variare del punto Q e sensibilmente diverso da zero. Si può osservare che se si volesse studiare l'oscillatore di Hertz secondo quanto si è visto in 2.5 si dovrebbe dapprima eliminare il conduttore mediante l'introduzione di opportune correnti volumetriche equivalenti e poi fare ricorso alle formule del paragrafo 2.5 stesso per calcolare le intensità del campo, $\bar{E}(P)$ e $\bar{H}(P)$. Con l'introduzione delle correnti lineari e delle cariche puntiformi che le tamponano, l'oscillatore di Hertz (detto talvolta anche *dipolo di Hertz* per la presenza delle cariche alle sue estremità) può essere descritto come una corrente lineare localizzata su di un segmento rettilineo di lunghezza l , con alle estremità due cariche puntiformi, una opposta dell'altra. Ciò semplifica notevolmente il problema matematico perché $\bar{A}(P)$ è dato dall'integrale di linea (4.143), anziché da quello di volume (4.134); la contropartita di tale semplificazione è che le formule che così si ottengono sono una fedele descrizione del campo solo a una certa distanza dal dipolo hertziano.

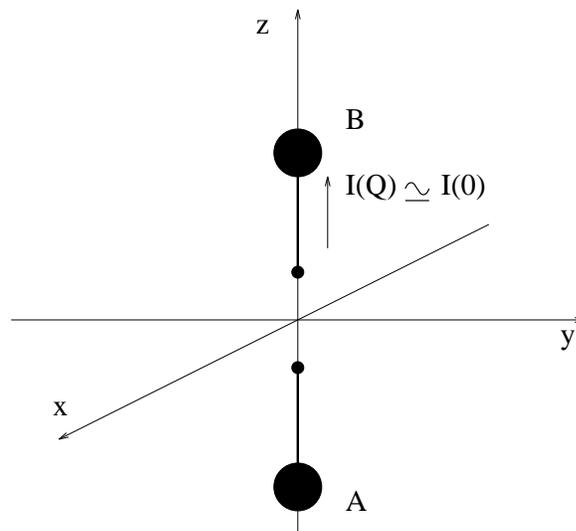


Figura 4.3: Oscillatore di Hertz.

Cogliendo l'occasione offerta dalla digressione fatta sull'oscillatore di Hertz, si può segnalare che nello studio dei campi elettromagnetici "piccolo" e "grande" è sempre da intendersi nel senso di piccolo o grande rispetto alla più piccola o alla più grande lunghezza d'onda in gioco ed alla più grande dimensione lineare delle sorgenti, per cui possono essere schematizzati con correnti lineari anche sistemi irradianti che di una struttura filiforme hanno assai poco, come ad esempio le antenne autoportanti di radiodiffusione ad onde medie, così come possono essere sostituite con cariche puntiformi capacità terminali con armature assai voluminose.

Tornando a considerare le due cariche q_A e q_B alle estremità della linea l , si può osservare che per le grandezze funzioni del tempo si ha dalla (4.189)

$$-\frac{\partial q_{\sim A}}{\partial t} = I_{\sim}(A^-) \quad (4.191)$$

e dalla (4.190)

$$\frac{\partial q_{\sim B}}{\partial t} = I_{\sim}(B^-), \quad (4.192)$$

per cui da $I_{\sim}(A^-) = I_{\sim}(B^-)$, come avviene per il dipolo hertziano, discende che se $q_{\sim B}$ sta aumentando $q_{\sim A}$ sta diminuendo, e viceversa. Pertanto il meccanismo di funzionamento dell'oscillatore di Hertz (che a riposo ha in ogni suo punto densità di carica nulla perché le cariche positive e negative si equilibrano) si basa su di un movimento alternativo di cariche positive da un'estremità all'altra. Ciò giustifica la denominazione di *oscillatore* data al sistema.

4.12.4 Sorgente puntiforme

Quando è

$$\bar{J} = \bar{J}_Q = \bar{M}\delta_Q, \quad (4.193)$$

con \bar{M} vettore costante, che si può, per fissare le idee, porre uguale a $\mathcal{M}\hat{k}$, si ha

$$\text{div } \bar{J} = \text{div } \bar{J}_Q = \text{div } (\bar{M}\delta_Q) = \mathcal{M}\frac{\partial \delta_Q}{\partial z}. \quad (4.194)$$

Per definizione di derivata di una distribuzione si ha allora

$$\begin{aligned} \langle \text{div } \bar{J}, \varphi \rangle &= \langle \mathcal{M}\frac{\partial \delta_Q}{\partial z}, \varphi \rangle = \\ &= -\mathcal{M} \langle \delta_Q, \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) \rangle. \end{aligned} \quad (4.195)$$

Approssimando la derivata rispetto a z con il rapporto incrementale, posto $h = \Delta z$ si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) \simeq \frac{\Delta \varphi}{\Delta z} = \frac{\varphi(P+h) - \varphi(P)}{h} \quad (4.196)$$

e quindi, per la (4.195),

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}\frac{\partial \delta_Q}{\partial z}, \varphi \rangle &= -\mathcal{M} \langle \delta_Q, \frac{\varphi(P+h) - \varphi(P)}{h} \rangle = \\ &= -\frac{\mathcal{M}}{h} [\langle \delta_Q, \varphi(P+h) \rangle - \langle \delta_Q, \varphi(P) \rangle] = \\ &= -\frac{\mathcal{M}}{h} [\varphi(Q+h) - \varphi(Q)], \end{aligned} \quad (4.197)$$

relazione che in termini di distribuzioni porta a scrivere

$$\text{div } \bar{J} = \mathcal{M}\frac{\partial \delta_Q}{\partial z} \simeq -\frac{\mathcal{M}}{h}(\delta_{Q+h} - \delta_Q). \quad (4.198)$$

Dalla (4.175) si trae allora

$$\rho = \rho_Q \delta_Q = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{M}}{j\omega h} (\delta_{Q+h} - \delta_Q), \quad (4.199)$$

cioè con una sorgente puntiforme ubicata in un punto Q sono associate due cariche elettriche $\left(\frac{\mathcal{M}}{j\omega h}\right)$ e $\left(-\frac{\mathcal{M}}{j\omega h}\right)$, che per h che tende a zero si avvicinano sempre più, senza mai giungere ad essere coincidenti in Q , perché in tal caso si annullerebbero vicendevolmente. Si noti come quest'ultima considerazione contrasti con l'ipotesi di sorgente puntiforme, enfatizzando, se mai ve ne fosse bisogno, la natura esclusivamente matematica di tale sorgente.

4.12.5 Caso generale

Quanto si è detto in precedenza ed il principio di sovrapposizione degli effetti permettono di affermare che nel caso in cui siano presenti sorgenti elettriche di tutti i tipi considerati si ha

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{\operatorname{div} \bar{J}_V(Q)}{j\omega} U_V + \frac{\hat{n} \cdot \bar{J}_V(Q^-)}{j\omega} \delta_{S'} - \\ &\quad - \frac{\operatorname{div}_S \bar{J}_S(Q)}{j\omega} \delta_S + \frac{\hat{\nu} \cdot \bar{J}_S(Q^-)}{j\omega} \delta_{l'} - \\ &\quad - \frac{1}{j\omega} \frac{dI}{ds}(Q) \delta_l + \sum \left[\delta_B \frac{I(B^-)}{j\omega} - \delta_A \frac{I(A^-)}{j\omega} \right] + \\ &\quad + \sum \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{M}}{j\omega h} (\delta_{Q+h} - \delta_Q), \end{aligned} \quad (4.200)$$

nella quale i segni di sommatoria stanno ad indicare che le coppie di cariche elettriche puntiformi associate alle correnti lineari e le sorgenti puntiformi isolate possono essere più di una. Conglobando in S ed l anche le superficie S' che delimitano V ed i bordi l' delle S si può pertanto scrivere

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_V + \rho_S + \rho_l + \rho_Q = \\ &= \rho_V(Q) U_V + \rho_S(Q) \delta_S + \rho_l(Q) \delta_l + \sum \rho_Q \delta_Q. \end{aligned} \quad (4.201)$$

Per il principio di dualità, dalle (4.200) (4.201) segue che per la densità di carica magnetica si può scrivere

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{\operatorname{div} \bar{M}_V(Q)}{j\omega} U_V + \frac{\hat{n} \cdot \bar{M}_V(Q^-)}{j\omega} \delta_{S'} - \\ &\quad - \frac{\operatorname{div}_S \bar{M}_S(Q)}{j\omega} \delta_S + \frac{\hat{\nu} \cdot \bar{M}_S(Q^-)}{j\omega} \delta_{l'} - \\ &\quad - \frac{1}{j\omega} \frac{dK}{ds}(Q) \delta_l + \sum \left[\delta_B \frac{K(B^-)}{j\omega} - \delta_A \frac{K(A^-)}{j\omega} \right] + \\ &\quad + \sum \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}}{j\omega h} (\delta_{Q+h} - \delta_Q), \end{aligned} \quad (4.202)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_V + \lambda_S + \lambda_l + \lambda_Q = \\ &= \lambda_V(Q) U_V + \lambda_S(Q) \delta_S + \lambda_l(Q) \delta_l + \sum \lambda_Q \delta_Q. \end{aligned} \quad (4.203)$$

Analogamente a quanto si è detto in 4.8.5 per le densità di corrente, gli insiemi che interessano le cariche elettriche non sono coincidenti con quelli relativi alle cariche magnetiche per cui se è necessario distinguere fra di essi conviene fare ricorso ai pedici e ed m , come è già stato suggerito in 4.8.5.

4.13 Potenziali scalari

Eseguito la divergenza di ambo i membri della (4.30) si ottiene

$$\operatorname{div} \bar{E} = -\nabla^2 p - j \omega \operatorname{div} \bar{A}, \quad (4.204)$$

relazione che tenendo presenti le (4.23) (4.32) (4.34) porta a scrivere

$$\nabla^2 p - \sigma^2 p = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (4.205)$$

Dal confronto fra la (4.205) e la (4.35) segue che per la distribuzione p , potenziale scalare elettrico, vale una equazione formalmente identica a quella che è soddisfatta dalle componenti del potenziale vettore magnetico \bar{A} in un sistema di coordinate cartesiane. Ciò permette di dire immediatamente che quanto si è trovato in 4.8 per i potenziali vettori magnetici \bar{A} associati con i vari tipi di \bar{J} può ora essere utilizzato per trovare le espressioni valide per i potenziali scalari elettrici p associati con i vari tipi di ρ sostituendo formalmente \bar{A} con il simbolo p e $\mu \bar{J}$ con ρ/ε . Dalla (4.148) si ottiene la seguente espressione generale della funzione $p(P)$ che genera la distribuzione potenziale scalare elettrico p

$$\begin{aligned} p(P) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \rho_V(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dV + \\ &+ \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_S \rho_S(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_l \rho_l(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dl + \\ &+ \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon} \rho_Q \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|}. \end{aligned} \quad (4.206)$$

Per il potenziale scalare magnetico s si ottiene, per dualità,

$$\begin{aligned} s(P) &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_V \lambda_V(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dV + \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu} \int_S \lambda_S(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dS + \frac{1}{4\pi\mu} \int_l \lambda_l(Q) \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|} dl + \\ &+ \sum \frac{1}{4\pi\mu} \lambda_Q \frac{e^{-\sigma|P-Q|}}{|P-Q|}. \end{aligned} \quad (4.207)$$

Capitolo 5

Discontinuità delle intensità di campo

5.1 Discontinuità [5] delle intensità di campo attraverso una superficie

In accordo con quanto detto in 3.8.5 si faccia ora l'ipotesi che le sorgenti di campo elettromagnetico siano esclusivamente del tipo (4.146) (4.147). Dato un volume V delimitato da una superficie chiusa S di normale \hat{n} orientata verso i punti di $V_\infty \setminus V$ (figure 5.1 e 5.2) si supponga che le sorgenti di campo presenti siano soltanto una corrente superficiale elettrica di densità

$$\bar{J}_S = \bar{J}_S(Q) \delta_S \quad (5.1)$$

e correnti volumetriche elettriche di densità

$$\bar{J}_V = \bar{J}_V(P) U_V(P) U_{V_\infty} = \bar{J}_V(P) U_V, \quad (5.2)$$

con $\bar{J}_V(P)$ derivabile infinite volte in tutto V_∞ . Dato che $\bar{J}_V(P) U_V(P)$ ha in S una discontinuità pari a $\hat{n} \cdot \bar{J}_V(P^-)$, con P^- che tende a $Q \in S$, per quanto si è visto in 4.12 si può dire che su S vi è anche una carica elettrica superficiale

$$\rho_S = \rho_S(Q) \delta_S, \quad (5.3)$$

di densità

$$\rho_S(Q) = -\frac{\text{div}_S \bar{J}_S(Q)}{j\omega} + \frac{\hat{n} \cdot \bar{J}_V(P^-)}{j\omega}, \quad P^- \rightarrow Q \in S. \quad (5.4)$$

Poiché è $U_{V_\infty} = U_{V_\infty \setminus V} + U_V$ (si veda la nota a pagina 31), si può scrivere

$$\bar{E} = \bar{E}(P) U_{V_\infty} = \bar{E}(P) U_{V_\infty \setminus V} + \bar{E}(P) U_V, \quad (5.5)$$

$$\bar{H} = \bar{H}(P) U_{V_\infty} = \bar{H}(P) U_{V_\infty \setminus V} + \bar{H}(P) U_V. \quad (5.6)$$

Peraltro, in accordo con quanto si è detto in 3.7, $\bar{E}(P)$ e $\bar{H}(P)$ possono essere supposti derivabili infinite volte in $V_\infty \setminus S$ perché le sole sorgenti sono \bar{J}_S e \bar{J}_V (in corrispondenza di S si hanno le discontinuità della densità di corrente volumetrica $\bar{J}_V(P) U_V(P)$ e su S è localizzata la densità di corrente $\bar{J}_S(Q)$), per cui si può far ricorso alla (B.102), e quindi, indicati con P^+ e P^- due punti, uno in $V_\infty \setminus V$, l'altro in $V \setminus S$, che si avvicinano indefinitamente a $Q \in S$, si viene a dire che, tenute

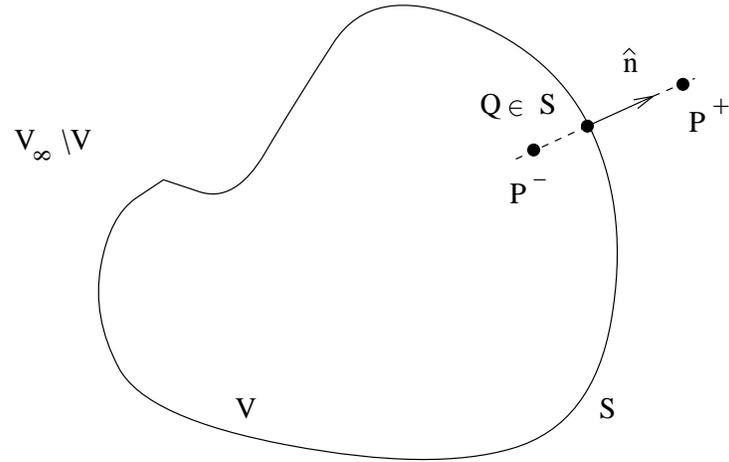


Figura 5.1: V interno ad S .

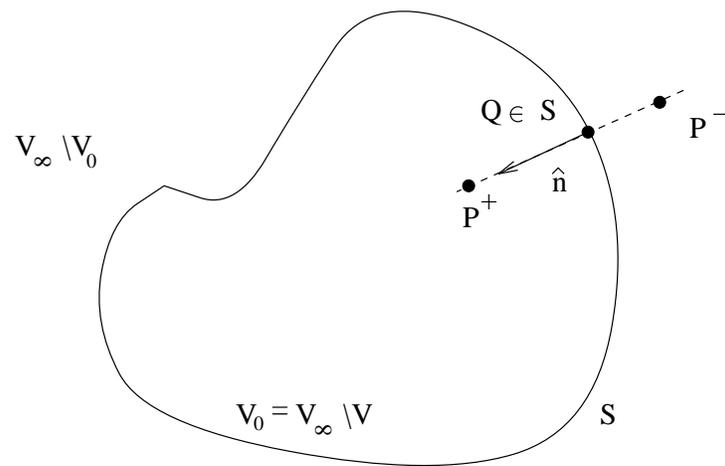


Figura 5.2: V esterno ad S .

presenti le (4.15) (4.16) e le (4.23) (4.24), per ogni funzione di prova $\varphi \in F$ si ha

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \bar{H} &= \operatorname{rot} [\bar{H}(P) U_V + \bar{H}(P) U_{V_\infty \setminus V}] = \\
 &= U_V \operatorname{rot} \bar{H}(P) + U_{V_\infty \setminus V} \operatorname{rot} \bar{H}(P) + \\
 &\quad + \hat{n} \times [\bar{H}(P^+) - \bar{H}(P^-)] \delta_S = j \omega \varepsilon \bar{E} + \bar{J} = \\
 &= j \omega \varepsilon [\bar{E}(P) U_V + \bar{E}(P) U_{V_\infty \setminus V}] + \\
 &\quad + \bar{J}_V(P) U_V + \bar{J}_S(Q) \delta_S,
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \bar{E} &= \operatorname{rot} [\bar{E}(P) U_V + \bar{E}(P) U_{V_\infty \setminus V}] = \\
 &= U_V \operatorname{rot} \bar{E}(P) + U_{V_\infty \setminus V} \operatorname{rot} \bar{E}(P) + \\
 &\quad + \hat{n} \times [\bar{E}(P^+) - \bar{E}(P^-)] \delta_S = -j \omega \mu \bar{H} = \\
 &= -j \omega \mu [\bar{H}(P) U_V + \bar{H}(P) U_{V_\infty \setminus V}],
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \bar{E} &= \operatorname{div} [\bar{E}(P) U_V + \bar{E}(P) U_{V_\infty \setminus V}] = \\
 &= U_V \operatorname{div} \bar{E}(P) + U_{V_\infty \setminus V} \operatorname{div} \bar{E}(P) + \\
 &\quad + \hat{n} \cdot [\bar{E}(P^+) - \bar{E}(P^-)] \delta_S = \\
 &= -\frac{\operatorname{div} \bar{J}_V(P)}{j \omega \varepsilon} U_V + \frac{\rho_S(Q)}{\varepsilon} \delta_S,
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

con $\rho_S(Q)$ fornito dalla (5.4),

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \bar{H} &= \operatorname{div} [\bar{H}(P) U_V + \bar{H}(P) U_{V_\infty \setminus V}] = \\
 &= U_V \operatorname{div} \bar{H}(P) + U_{V_\infty \setminus V} \operatorname{div} \bar{H}(P) + \\
 &\quad + \hat{n} \cdot [\bar{H}(P^+) - \bar{H}(P^-)] \delta_S = 0,
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

dalle quali (si tenga presente che è $\bar{J}[P] = \bar{J}_V[P] + \bar{J}_S[P] = \bar{J}_V(P)$ per $P \in V \setminus S$ e $\bar{J}[P] = 0$ per $P \in V_\infty \setminus V$) discendono le

$$\operatorname{rot} \bar{H}(P) = j \omega \varepsilon \bar{E}(P) + \bar{J}_V(P) U_V(P), \tag{5.11}$$

$$\operatorname{rot} \bar{E}(P) = -j \omega \mu \bar{H}(P), \tag{5.12}$$

$$\operatorname{div} \bar{E}(P) = -\frac{\operatorname{div} \bar{J}_V(P)}{j \omega \varepsilon} U_V(P), \tag{5.13}$$

$$\operatorname{div} \bar{H}(P) = 0, \tag{5.14}$$

valide per $P \in V_\infty \setminus S$, e le

$$\hat{n} \times [\bar{H}(P^+) - \bar{H}(P^-)] = \bar{J}_S(Q), \tag{5.15}$$

$$\hat{n} \times [\bar{E}(P^+) - \bar{E}(P^-)] = 0, \tag{5.16}$$

$$\hat{n} \cdot \varepsilon [\bar{E}(P^+) - \bar{E}(P^-)] = \rho_S(Q), \tag{5.17}$$

$$\hat{n} \cdot [\bar{H}(P^+) - \bar{H}(P^-)] = 0, \tag{5.18}$$

valide per $P^+, P^- \rightarrow Q \in S$ e con $\rho_S(Q)$ fornito dalla (5.4).

Le (5.11) (5.12) (5.13) (5.14) non contengono alcuna nuova informazione perché altro non sono che le (4.96) (4.97) (4.98) (4.99) scritte con termine noto $\bar{J}[P] = \bar{J}_V(P)$, $\bar{M}[P] = 0$ e $\dot{\tau} = V_\infty \setminus S$; più interessanti sono le (5.15) (5.16) (5.17) (5.18) che verranno considerate in dettaglio nei due prossimi sottoparagrafi.

5.1.1 Discontinuità del componente tangente

Dalle (5.15) (5.16) segue immediatamente

$$\hat{n} \times [\overline{H}(P^+) - \overline{H}(P^-)] \times \hat{n} = \overline{J}_S(Q) \times \hat{n}, \quad (5.19)$$

$$\hat{n} \times [\overline{E}(P^+) - \overline{E}(P^-)] \times \hat{n} = 0, \quad (5.20)$$

$$P^+, P^- \rightarrow Q \in S.$$

La (5.19) informa che nella ipotesi di sorgenti superficiali esclusivamente dei tipi (4.138) (4.140) *condizione necessaria e sufficiente perché vi sia una discontinuità attraverso una superficie S del componente di $\overline{H}(P)$ tangente a quella superficie è che su S sia localizzata una corrente superficiale elettrica*. Dalla (5.20) segue invece che *il componente di $\overline{E}(P)$ tangente ad una superficie S sulla quale è localizzata soltanto una corrente superficiale elettrica è continuo*.

Per dualità dalle (5.15) (5.19) (5.20) si ottiene

$$[\overline{E}(P^+) - \overline{E}(P^-)] \times \hat{n} = \overline{M}_S(Q), \quad (5.21)$$

$$\hat{n} \times [\overline{E}(P^+) - \overline{E}(P^-)] \times \hat{n} = \hat{n} \times \overline{M}_S(Q), \quad (5.22)$$

$$\hat{n} \times [\overline{H}(P^+) - \overline{H}(P^-)] \times \hat{n} = 0, \quad (5.23)$$

$$P^+, P^- \rightarrow Q \in S.$$

Pertanto si può affermare che nella ipotesi di sorgenti superficiali esclusivamente del tipo (4.138) (4.140), *condizione necessaria e sufficiente perché vi sia una discontinuità attraverso una superficie S del componente di $\overline{E}(P)$ tangente a quella superficie è che su S sia localizzata una corrente superficiale magnetica*. Dalla (5.23) segue infine che *il componente di $\overline{H}(P)$ tangente ad una superficie S sulla quale è localizzata soltanto una corrente superficiale magnetica è continuo*.

Si noti che le condizioni poste come necessarie e sufficienti per avere una discontinuità dei componenti tangenti delle intensità dei campi elettrico o magnetico non sono *nè necessarie, nè sufficienti* se, applicando quanto si è visto in 4.6, si considerano generatori magnetici (elettrici) equivalenti a quelli elettrici (magnetici) sinora considerati o ad una parte di essi. Per convincersi della validità di tale affermazione si osservi, ad esempio, che se la corrente superficiale elettrica di densità $\overline{J}_S = \overline{J}_S(Q)\delta_S$ viene sostituita con il generatore magnetico ($rot \overline{J}_S$)/($j\omega\varepsilon$), invece delle

$$rot \overline{H} = j\omega\varepsilon \overline{E} + \overline{J}_S, \quad (5.24)$$

$$rot \overline{E} = -j\omega\mu \overline{H}, \quad (5.25)$$

si ha

$$rot \overline{H} = j\omega\varepsilon \overline{E}', \quad (5.26)$$

$$rot \overline{E}' = -j\omega\mu \overline{H} + \frac{rot [\overline{J}_S(Q)\delta_S]}{j\omega\varepsilon}; \quad (5.27)$$

poiché \overline{H}' ed \overline{H} hanno gli stessi valori locali in $V_\infty \setminus S$, se ne deduce che la discontinuità del componente tangente a S di $\overline{H}(P)$ si ritrova in $\overline{H}'(P)$ nonostante che su S non vi sia una corrente superficiale elettrica.

5.1.2 Discontinuità del componente normale

Dalle (5.17) (5.18), che qui si trascrivono per comodità

$$\hat{n} \cdot \varepsilon [\overline{E}(P^+) - \overline{E}(P^-)] = \rho_S(Q), \quad (5.28)$$

$$\hat{n} \cdot [\overline{H}(P^+) - \overline{H}(P^-)] = 0, \quad (5.29)$$

$$P^+, P^- \rightarrow Q \in S,$$

si deduce che, nell'ipotesi che le sorgenti superficiali siano esclusivamente dei tipi (4.138) (4.140), quando su una superficie S vi è soltanto una carica elettrica superficiale *il componente normale ad S dell'intensità di campo elettrico è discontinuo attraverso S , mentre il componente normale ad S dell'intensità di campo magnetico è continuo*. Ogni volta che l'intensità di campo elettrico presenta una discontinuità del suo componente normale attraverso una superficie S si può quindi dire che su S è localizzata una carica elettrica superficiale di densità data dalla (5.28) e viceversa.

Per dualità dalle (5.28) (5.29) si ottiene

$$\hat{n} \cdot \mu [\overline{H}(P^+) - \overline{H}(P^-)] = \lambda_S(Q), \quad (5.30)$$

$$\hat{n} \cdot [\overline{E}(P^+) - \overline{E}(P^-)] = 0, \quad (5.31)$$

$$P^+, P^- \rightarrow Q \in S,$$

dalle quali si deduce che (sempre nell'ipotesi che le sorgenti superficiali siano esclusivamente dei tipi (4.138) (4.140)) quando su una superficie S vi è soltanto una carica magnetica superficiale *il componente normale ad S dell'intensità di campo magnetico è discontinuo attraverso S , mentre il componente normale ad S dell'intensità di campo elettrico è continuo*. Ogni qualvolta l'intensità di campo magnetico presenta una discontinuità del suo componente normale attraverso una superficie si può quindi dire che su S è localizzata una carica magnetica superficiale di densità data dalla (5.30) e viceversa.

In fig. 5.3 e fig. 5.4 è riassunto e visualizzato quanto si è trovato in questo capitolo per i componenti tangenti, indicando con Q i punti di S , con P quelli di $V_\infty \setminus S$ ed intendendo con $P^+ \in V_\infty \setminus V$ e $P^- \in \dot{V}$ due punti tendenti a Q .

Prima di finire si può notare che $\overline{J}_S(Q)$, $\overline{M}_S(Q)$, $\rho_S(Q)$, $\lambda_S(Q)$ possono essere nulle su una parte di S e quindi che l'ipotesi che tale superficie sia chiusa può essere lasciata cadere; in tal caso però sul bordo l' di S può essere localizzata una carica lineare elettrica o magnetica a causa di discontinuità di $\overline{J}_S(Q)$ o $\overline{M}_S(Q)$ e nelle formule precedenti il simbolo S (che stava ad indicare una superficie chiusa) deve essere sostituito con $\dot{S} = S \setminus l'$.

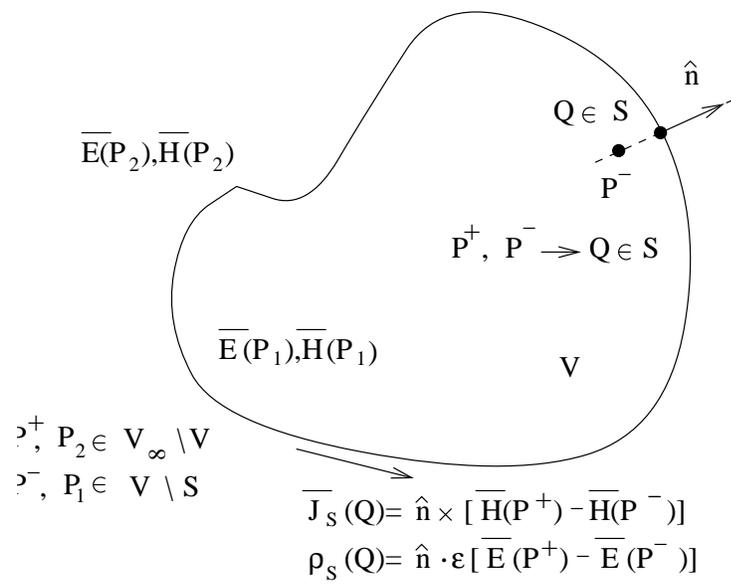


Figura 5.3: Discontinuità delle intensità di campo dovute a $\overline{J}_s(Q)$.

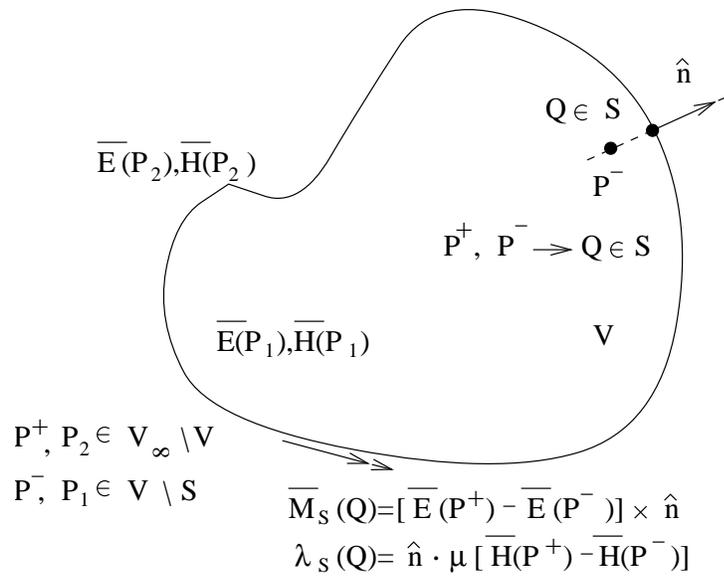


Figura 5.4: Discontinuità delle intensità di campo dovute a $\overline{\mathbf{M}}_S(\mathbf{Q})$.

Capitolo 6

Teoremi di equivalenza e di induzione

6.1 Correnti superficiali equivalenti. Correnti superficiali assorbenti

Si consideri una superficie S che divide V_∞ in due parti $V_\infty \setminus V$ e V (fig. 6.1), in modo che per i generatori \bar{J}, \bar{M} presenti in V_∞ si possa scrivere

$$\bar{J} = \bar{J}_1 + \bar{J}_2, \quad (6.1)$$

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2, \quad (6.2)$$

con

$$\bar{J}_1[P] = \bar{M}_1[P] = 0, \quad P \in V_\infty \setminus \dot{V}, \quad (6.3)$$

$$\bar{J}_2[P] = \bar{M}_2[P] = 0, \quad P \in V. \quad (6.4)$$

La (6.3) informa che i generatori \bar{J}_1, \bar{M}_1 sono localizzati in $\dot{V} = V \setminus S$ e la (6.4) che i generatori \bar{J}_2, \bar{M}_2 si trovano in $V_\infty \setminus V$. Ciò, per quanto si è detto in 4.8.5, permette di affermare che le intensità $\bar{E}_1(P), \bar{H}_1(P)$ del campo \bar{E}_1, \bar{H}_1 dovuto alle sole \bar{J}_1, \bar{M}_1 soddisfano le equazioni di Maxwell omogenee in $V_\infty \setminus \dot{V}$ (fig. 6.2) e che le intensità $\bar{E}_2(P), \bar{H}_2(P)$ del campo \bar{E}_2, \bar{H}_2 dovuto alle sole \bar{J}_2, \bar{M}_2 (fig. 6.3) le soddisfano in V ; ovviamente le funzioni $\bar{E}_1(P), \bar{H}_1(P), \bar{E}_2(P), \bar{H}_2(P)$ sono continue attraverso S , dato che, per ipotesi, su tale superficie non sono localizzati generatori. È appena il caso di osservare che in fig. 6.3 e fig. 6.2 si è ommesso di precisare che le intensità del campo possono essere indefinite in insiemi di misura nulla nelle regioni in cui vi sono le sorgenti a causa di singolarità di prima o seconda specie; ciò verrà fatto, per semplicità, anche nelle figure che seguono. Si consideri ora il campo

$$\bar{E}'_1 = \bar{E}'_1(P) U_{V_\infty} = \bar{E}_1(P) U_{V_\infty \setminus V}, \quad (6.5)$$

$$\bar{H}'_1 = \bar{H}'_1(P) U_{V_\infty} = \bar{H}_1(P) U_{V_\infty \setminus V}, \quad (6.6)$$

che ha intensità uguali a quelle di \bar{E}_1, \bar{H}_1 in $V_\infty \setminus V$ e nulle in \dot{V} , per cui $\bar{E}'_1(P), \bar{H}'_1(P)$ soddisfano le equazioni di Maxwell omogenee in $V_\infty \setminus S$. Ciò, sempre per quanto si è detto in 4.8.5, permette di affermare che il campo \bar{E}'_1, \bar{H}'_1 non ha sorgenti in $V_\infty \setminus S$, ovvero che le può avere soltanto su S .

L'individuazione di tali sorgenti $\bar{J}_{S1}, \bar{M}_{S1}$ è immediata; infatti per le (6.5) (6.6) e per la continuità di $\bar{E}_1(P), \bar{H}_1(P)$ attraverso S si ha

$$\bar{E}'_1(P^+) = \bar{E}_1(Q), \quad (6.7)$$

$$\bar{H}'_1(P^+) = \bar{H}_1(Q), \quad (6.8)$$

$$\bar{E}'_1(P^-) = \bar{H}'_1(P^-) = 0, \quad (6.9)$$

$$P^+, P^- \rightarrow Q \in S,$$

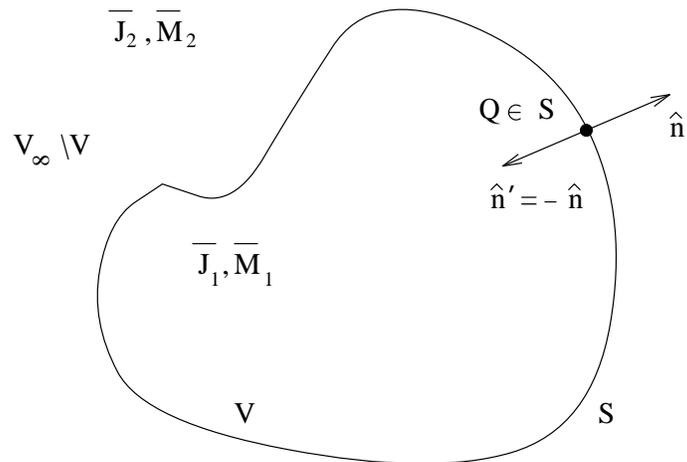


Figura 6.1: Superficie chiusa di riferimento.

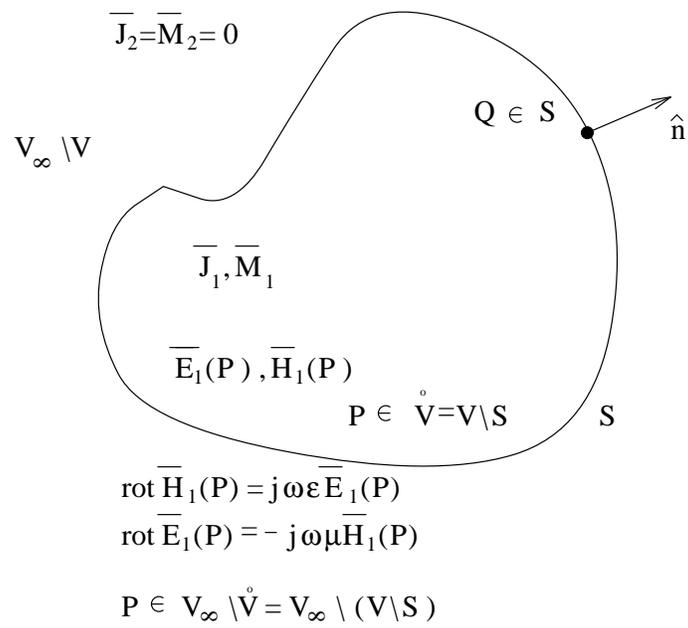


Figura 6.2: $\overline{J}_2 = \overline{M}_2 = 0$.

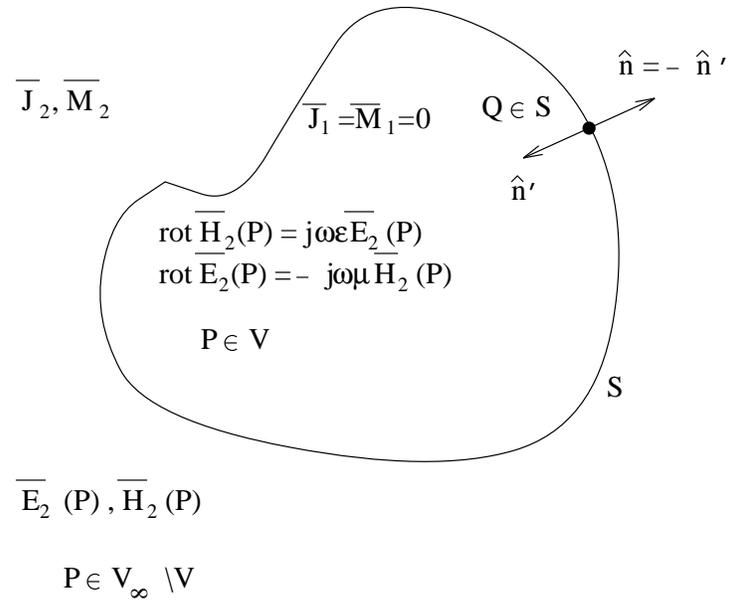


Figura 6.3: $\overline{J}_1 = \overline{M}_1 = 0$.

per cui dalle (5.15) (5.21) si trae

$$\bar{J}_{S1}(Q) = \hat{n} \times \bar{H}_1(Q), \quad (6.10)$$

$$\bar{M}_{S1}(Q) = \bar{E}_1(Q) \times \hat{n}, \quad (6.11)$$

$$Q \in S$$

e quindi

$$\bar{J}_{S1} = \bar{J}_{S1}(Q)\delta_S = \hat{n} \times \bar{H}_1(Q)\delta_S, \quad (6.12)$$

$$\bar{M}_{S1} = \bar{M}_{S1}(Q)\delta_S = \bar{E}_1(Q) \times \hat{n}\delta_S. \quad (6.13)$$

Analogamente si giunge a dire che il campo

$$\bar{E}'_2 = \bar{E}'_2(P)U_{V_\infty} = \bar{E}_2(P)U_V, \quad (6.14)$$

$$\bar{H}'_2 = \bar{H}'_2(P)U_{V_\infty} = \bar{H}_2(P)U_V \quad (6.15)$$

è sostenuto dai generatori

$$\bar{J}_{S2} = \bar{J}_{S2}(Q)\delta_S, \quad (6.16)$$

$$\bar{M}_{S2} = \bar{M}_{S2}(Q)\delta_S, \quad (6.17)$$

con

$$\bar{J}_{S2}(Q) = -\hat{n} \times \bar{H}_2(Q) = \hat{n}' \times \bar{H}_2(Q), \quad (6.18)$$

$$\bar{M}_{S2}(Q) = -\bar{E}_2(Q) \times \hat{n} = \bar{E}_2(Q) \times \hat{n}', \quad (6.19)$$

$$Q \in S.$$

Le correnti di densità $\bar{J}_{S1}, \bar{M}_{S1}$ prendono il nome di *correnti superficiali equivalenti* in $V_\infty \setminus V$ ai generatori \bar{J}_1, \bar{M}_1 perché in assenza di essi tali correnti forniscono in $V_\infty \setminus V$ le stesse intensità di campo, mentre le $\bar{J}_{S2}, \bar{M}_{S2}$ sono le densità delle *correnti superficiali equivalenti* in \dot{V} a \bar{J}_2, \bar{M}_2 . In fig. 6.4 è rappresentata la situazione che si stabilisce quando agiscono i soli generatori equivalenti $\bar{J}_{S1}, \bar{M}_{S1}$ e analogamente per $\bar{J}_{S2}, \bar{M}_{S2}$ in fig. 6.5.

Le correnti di densità $\bar{J}_{S1}^a = -\bar{J}_{S1}, \bar{M}_{S1}^a = -\bar{M}_{S1}$ ($\bar{J}_{S2}^a = -\bar{J}_{S2}, \bar{M}_{S2}^a = -\bar{M}_{S2}$) sostengono, evidentemente, un campo \bar{E}''_1, \bar{H}''_1 (\bar{E}''_2, \bar{H}''_2) opposto a quello di $\bar{J}_{S1}, \bar{M}_{S1}$ ($\bar{J}_{S2}, \bar{M}_{S2}$) (fig. 6.6 e fig. 6.7). Esse vengono denominate *correnti assorbenti* per i generatori \bar{J}_1, \bar{M}_1 (\bar{J}_2, \bar{M}_2), e la ragione di ciò è da ricercare nel fatto che esse “cancellano” il campo dei generatori \bar{J}_1, \bar{M}_1 (\bar{J}_2, \bar{M}_2) nella regione $V_\infty \setminus V$ ($\dot{V} = V \setminus S$) quando agiscono insieme a tali generatori, mentre non alterano il campo ad essi dovuto in $\dot{V} = V \setminus S$ ($V_\infty \setminus V$). Le correnti assorbenti si comportano come assorbitori perfetti.

Per inciso si può dire che in pratica non si riesce mai a realizzare assorbitori perfetti, anche se si cerca di avvicinarsi loro il più possibile, sia per poter lavorare in presenza di ostacoli (ad es. in laboratorio, su una nave, su un aereo ecc.) come nello spazio libero, sia per evitare di manifestare la propria presenza con riflessioni di campo, come avviene nel caso di potenziali bersagli radar.

6.2 Teorema di equivalenza

Si può osservare che il campo \bar{E}, \bar{H} sostenuto dalla totalità dei generatori, $(\bar{J}_1 + \bar{J}_2), (\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$, ha intensità che si possono esprimere nel seguente modo

$$\bar{E}(P) = \bar{E}_1(P) + \bar{E}_2(P), \quad (6.20)$$

$$\bar{H}(P) = \bar{H}_1(P) + \bar{H}_2(P), \quad (6.21)$$

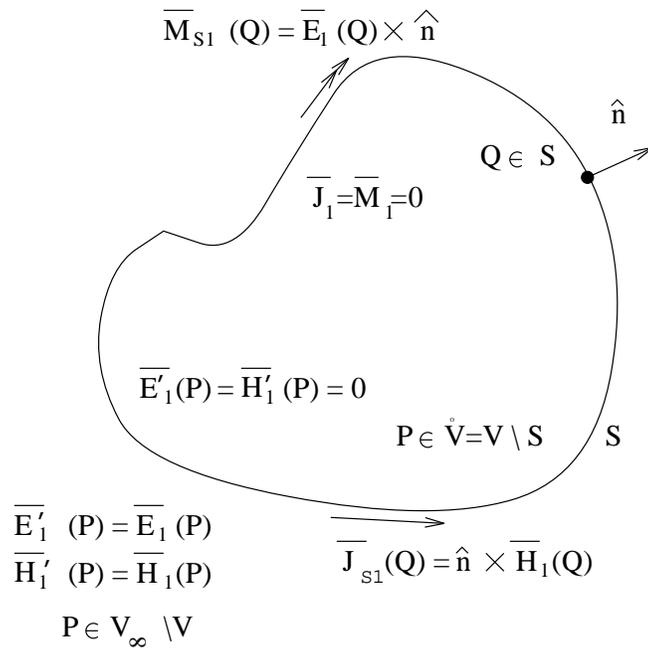


Figura 6.4: Correnti equivalenti a $\overline{J}_1, \overline{M}_1$.

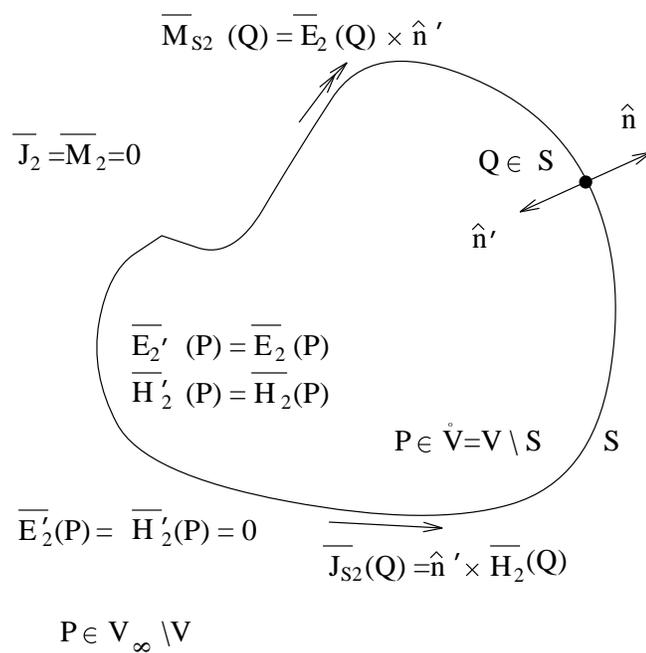
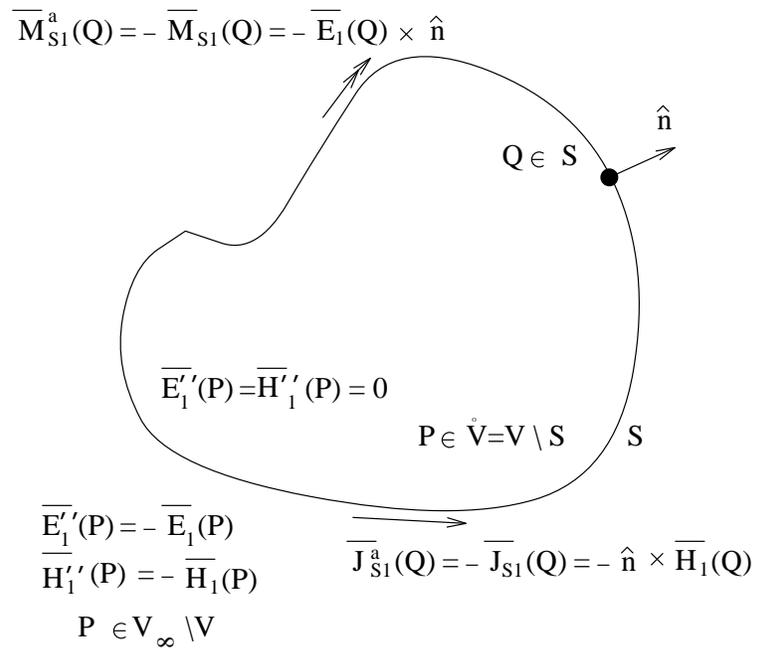


Figura 6.5: Correnti equivalenti a $\overline{J}_2, \overline{M}_2$.



[p]

Figura 6.6: Correnti assorbenti per $\overline{J}_1, \overline{M}_1$.

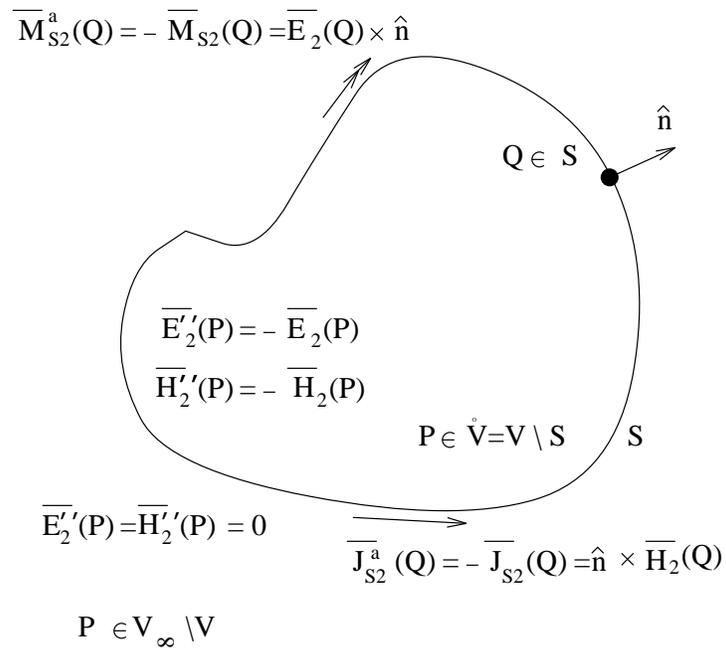


Figura 6.7: Correnti assorbenti per $\overline{J}_2, \overline{M}_2$.

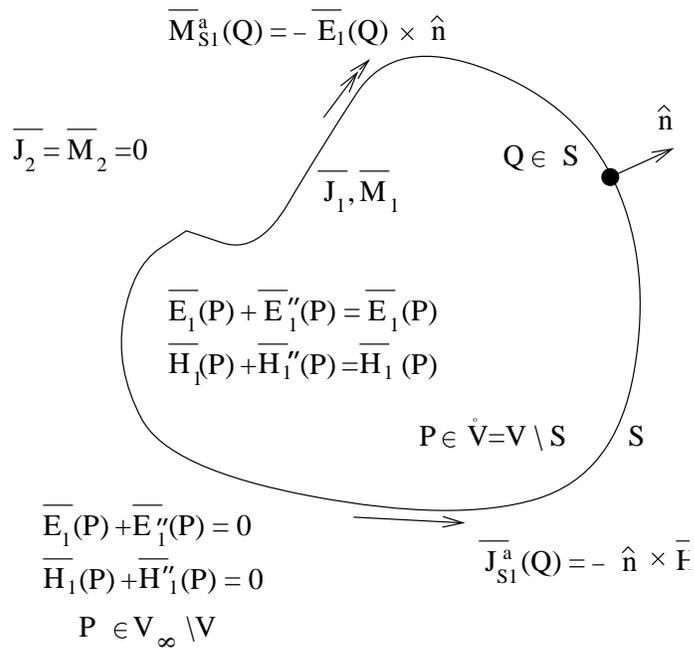
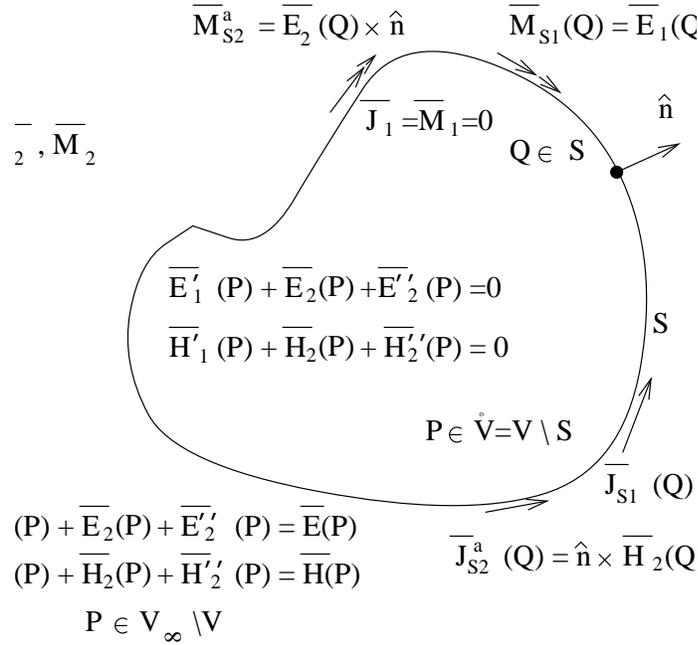


Figura 6.8: Campo di $\overline{J}_1, \overline{M}_1$ in presenza delle relative correnti assorbenti.


 Figura 6.9: Teorema di equivalenza per $P \in V_\infty \setminus V$.

nei loro punti di definizione (fra i quali sono compresi anche quelli di S , dato che le (6.3) (6.4) escludono che vi siano generatori su S).

Si supponga ora di far agire contemporaneamente le $\overline{\mathbf{J}}_2$, $\overline{\mathbf{M}}_2$ e le relative correnti assorbenti, nonché le correnti equivalenti di $\overline{\mathbf{J}}_1$, $\overline{\mathbf{M}}_1$ in assenza di queste ultime. Si giunge alla situazione di fig. 6.9.

Da tale figura si trae che quando agiscono i generatori

$$\overline{\mathbf{J}}_1 = \overline{\mathbf{M}}_1 = 0, \quad (6.22)$$

$$\overline{\mathbf{J}}_2 + \overline{\mathbf{J}}_S = \overline{\mathbf{J}}_2 + \overline{\mathbf{J}}_S(\mathbf{Q}) \delta_S, \quad (6.23)$$

$$\overline{\mathbf{M}}_2 + \overline{\mathbf{M}}_S = \overline{\mathbf{M}}_2 + \overline{\mathbf{M}}_S(\mathbf{Q}) \delta_S, \quad (6.24)$$

con

$$\begin{aligned}\bar{J}_S(Q) &= \bar{J}_{S1}(Q) + \bar{J}_{S2}^a(Q) = \bar{J}_{S1}(Q) - \bar{J}_{S2}(Q) = \\ &= \hat{n} \times [\bar{H}_1(Q) + \bar{H}_2(Q)] = \hat{n} \times \bar{H}(Q),\end{aligned}\quad (6.25)$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_S(Q) &= \bar{M}_{S1}(Q) + \bar{M}_{S2}^a(Q) = \bar{M}_{S1}(Q) - \bar{M}_{S2}(Q) = \\ &= [\bar{E}_1(Q) + \bar{E}_2(Q)] \times \hat{n} = \bar{E}(Q) \times \hat{n},\end{aligned}\quad (6.26)$$

$Q \in S,$

il campo è dato da $\bar{E}(Q)U_{V_\infty \setminus V}$, $\bar{H}(Q)U_{V_\infty \setminus V}$, cioè in $V_\infty \setminus V$ ha intensità uguali a quelle del campo sostenuto dalle (6.1) (6.2), mentre in \dot{V} esso ha intensità nulle.

Se anziché considerare i generatori (6.23) (6.24), si considerano i generatori

$$\bar{J}_2 = \bar{M}_2 = 0, \quad (6.27)$$

$$\bar{J}_1 - \bar{J}_S = \bar{J}_1 - \bar{J}_S(Q) \delta_S, \quad (6.28)$$

$$\bar{M}_1 - \bar{M}_S = \bar{M}_1 - \bar{M}_S(Q) \delta_S, \quad (6.29)$$

con $\bar{J}_S(Q)$, $\bar{M}_S(Q)$ sempre date dalle (6.25) (6.26) (cioè se in assenza di \bar{J}_2 , \bar{M}_2 , si suppone che agiscano \bar{J}_1 , \bar{M}_1 e le relative correnti assorbenti, nonché le correnti equivalenti dei generatori \bar{J}_2 , \bar{M}_2) si ottiene, sovrapponendo la fig. 6.5 e la fig. 6.8, la situazione di fig. 6.10 dalla quale si trae che il campo sostenuto dai generatori (6.28) (6.29) in assenza di \bar{J}_2 e di \bar{M}_2 è dato da $\bar{E}(P)U_V$, $\bar{H}(P)U_V$, cioè ha in \dot{V} intensità uguali a quelle del campo sostenuto dalle (6.1) (6.2), mentre in $V_\infty \setminus V$ esso ha intensità nulle.

I risultati di fig. 6.9 e di fig. 6.10 sono noti come *teorema di equivalenza* (per le sorgenti interne o, rispettivamente, per le sorgenti esterne ad una superficie chiusa S , di normale \hat{n} orientata verso il suo esterno).

è importante osservare che per applicare il teorema di equivalenza è necessario conoscere il componente tangente ad S di $\bar{E}(P)$ e di $\bar{H}(P)$ nei punti Q di S .

6.3 Mezzo disomogeneo e teorema di equivalenza

Una parte dei generatori $\bar{J} = \bar{J}_1 + \bar{J}_2$, $\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$ in fig. 6.1 può essere costituita da correnti volumetriche equivalenti (si veda 2.5) introdotte per rendere il mezzo omogeneo. Ovviamente è sempre possibile ritornare ad introdurre le disomogeneità del mezzo al posto di tali sorgenti, senza alterare il campo dovuto ai rimanenti generatori; questa osservazione mette in luce due proprietà e precisamente:

- il teorema di equivalenza è valido anche in presenza di disomogeneità, ovunque collocate in V_∞ ;
- quando si applica il teorema di equivalenza le *disomogeneità* situate nella regione nella quale le *intensità di campo* risultano *nulle* (la regione \dot{V} in fig. 6.9 e la regione $V_\infty \setminus V$ in fig. 6.10) possono essere *variate a piacimento, in particolare del tutto eliminate*; per convincersene basta ricordare che le correnti volumetriche equivalenti, che permettono di variare le caratteristiche del mezzo a piacere, sono proporzionali o a $\bar{E}(P)$ o a $\bar{H}(P)$ per cui quando tali intensità sono nulle le alterazioni del mezzo non comportano l'introduzione di nuovi generatori di campo.

La seconda proprietà è particolarmente importante perché presenta l'impiego delle correnti superficiali equivalenti come una alternativa all'impiego delle correnti volumetriche equivalenti del paragrafo 3.5, per rendere omogeneo il mezzo. Sotto questo punto di vista una notevole differenza fra le due possibilità è che mentre le correnti volumetriche equivalenti rendono il mezzo *dappertutto* omogeneo, quelle superficiali eliminano le disomogeneità *solo in una regione* di V_∞ .

Un'altra differenza da mettere in evidenza è che quando si fa ricorso alle correnti *volumetriche* equivalenti è necessario conoscere, o prevedere, le intensità di campo in un *volume* (quello in cui

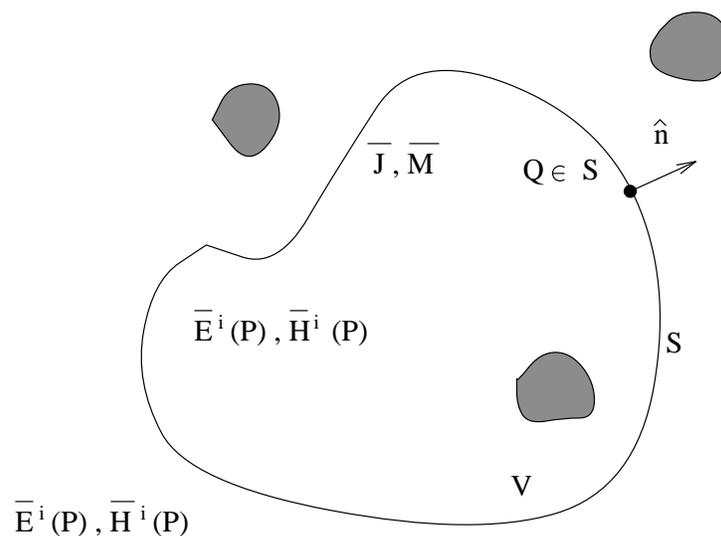


Figura 6.11: Mezzo in cui i generatori \bar{J} , \bar{M} sostengono il campo incidente, \bar{E}^i , \bar{H}^i , noto.

sono situate le disomogeneità), mentre quando si usano le correnti *superficiali* equivalenti si devono conoscere, o prevedere, i componenti tangenti ad una *superficie* chiusa delle intensità di campo.

A seconda dei casi può essere più conveniente usare correnti equivalenti volumetriche o superficiali; di regola si usano correnti volumetriche (che poi si approssimano con correnti lineari) per sorgenti *filiformi* (una dimensione nettamente prevalente rispetto alle altre) e correnti superficiali per le sorgenti ad *apertura* (ad es. trombe, paraboloidi) nelle quali è individuabile una superficie aperta attraverso cui passa tutta la potenza che viene irradiata (*area di bocca dell'antenna*), chiusa da una superficie nei punti della quale le intensità di campo sono praticamente nulle (*parte retrostante dell'antenna*).

6.4 Teorema di induzione

Si consideri la situazione di fig. 6.11 nella quale i generatori \bar{J} , \bar{M} sostengono un campo \bar{E}^i , \bar{H}^i (che verrà denominato *campo incidente* e che si supporrà noto) in un mezzo qualsiasi, eventualmente disomogeneo sia all'interno, sia all'esterno di una superficie S , di normale \hat{n} orientata verso l'esterno,

per $P \in V_\infty \setminus \dot{V}$ ed a $[\overline{E}^i(P) - \overline{E}(P)]$, $[\overline{H}^i(P) - \overline{H}(P)]$ per $P \in \dot{V}$ (fatta eventualmente eccezione per i punti di \dot{V} in cui le intensità non sono definite). Da tale osservazione si trae che i seguenti generatori (uguali alle correnti assorbenti relative al mezzo nella situazione di partenza, cambiate di segno)

$$\overline{J}_S(Q)\delta_S = -\overline{J}_S^a(Q)\delta_S = \hat{n} \times \overline{H}^i(Q)\delta_S, \quad (6.32)$$

$$\overline{M}_S(Q)\delta_S = -\overline{M}_S^a(Q)\delta_S = \overline{E}^i(Q) \times \hat{n}\delta_S \quad (6.33)$$

sostengono nel caso del mezzo modificato un campo, denominato *campo indotto*, che può essere visto come la somma di due campi, uno, denominato *campo trasmesso*,

$$\overline{E}^t = \overline{E}^t(P)U_{V_\infty \setminus V} = \overline{E}(P)U_{V_\infty \setminus V}, \quad (6.34)$$

$$\overline{H}^t = \overline{H}^t(P)U_{V_\infty \setminus V} = \overline{H}(P)U_{V_\infty \setminus V} \quad (6.35)$$

e l'altro, denominato *campo riflesso*,

$$\overline{E}^r = \overline{E}^r(P)U_V = [\overline{E}(P) - \overline{E}^i(P)]U_V, \quad (6.36)$$

$$\overline{H}^r = \overline{H}^r(P)U_V = [\overline{H}(P) - \overline{H}^i(P)]U_V. \quad (6.37)$$

Poiché le (6.34) (6.35) (6.36) (6.37) informano che le intensità $\overline{E}(P)$, $\overline{H}(P)$ del campo sostenuto dai generatori \overline{J} , \overline{M} nella situazione di fig. 6.12 sono uguali a quelle del campo trasmesso per $P \in V_\infty \setminus V$ ed alla somma di quelle del campo incidente e del campo riflesso per $P \in \dot{V}$ ne viene che essendo noto, per ipotesi, il campo incidente \overline{E}^i , \overline{H}^i , il problema di individuare il campo \overline{E} , \overline{H} , diviene quello di trovare il campo indotto. Tale possibilità è nota come *teorema di induzione*.

Si noti la differenza che vi è tra il teorema di equivalenza e quello di induzione, quando \overline{E} , \overline{H} è il campo con un mezzo omogeneo all'esterno di S : nel primo teorema i generatori superficiali sono incogniti perché funzioni delle intensità di campo $\overline{E}(P)$, $\overline{H}(P)$, (che sono, per l'appunto, incognite), ma potendosi rendere omogeneo il mezzo anche entro S (per il fatto che per $P \in \dot{V}$ il campo ha intensità nulle) sono disponibili le formule per calcolare il campo (quelle di 3.7); nel secondo teorema i generatori superficiali sono noti perché funzioni di $\overline{E}^i(P)$, $\overline{H}^i(P)$, (che per ipotesi sono note), ma non sono disponibili le formule per calcolare il campo dato che il mezzo è disomogeneo all'interno di S (quando in fig. 6.11 il mezzo è dappertutto omogeneo, ovvero il campo \overline{E}^i , \overline{H}^i è il campo sostenuto da \overline{J} , \overline{M} nello spazio libero, i due teoremi coincidono, e si ha, in particolare, $\overline{E}^r = \overline{H}^r = 0$).

Si può osservare che il teorema di induzione è utilizzabile con profitto in tutti i casi in cui il campo sostenuto da $\overline{J}_S = \hat{n} \times \overline{H}^i(Q)\delta_S$, $\overline{M}_S = \overline{E}^i(Q) \times \hat{n}\delta_S$ nello spazio libero (dappertutto omogeneo) ha intensità trascurabili nei punti $P \in \dot{V}$ in cui sono localizzate le disomogeneità. Infatti la presenza o meno di queste ultime provoca, in tale ipotesi, un effetto modesto.

Capitolo 7

Conduttori perfetti

7.1 Intensità del campo elettromagnetico in una regione limitata

Il problema di determinare le intensità del campo in una regione V limitata da una superficie chiusa S è già stato risolto in 6.2, fig. 6.10, dove si è dimostrato che nello spazio libero (mezzo dappertutto omogeneo) tali intensità sono calcolabili con le formule dei paragrafi 4.7, 4.8 in funzione dei generatori \bar{J}_1, \bar{M}_1 ubicati in \dot{V} e di due correnti superficiali di densità

$$-\bar{J}_S(Q) = \bar{H}(Q) \times \hat{n}, \quad (7.1)$$

$$-\bar{M}_S(Q) = \hat{n} \times \bar{E}(Q), \quad (7.2)$$

$$Q \in S.$$

Tali correnti superficiali sono state ottenute sommando le correnti assorbenti relative ai generatori \bar{J}_1, \bar{M}_1 con quelle equivalenti ai generatori \bar{J}_2, \bar{M}_2 situati in $V_\infty \setminus V$. Si può osservare che dalle (7.1) (7.2) discende che per calcolare le intensità di campo $\bar{E}(P), \bar{H}(P)$ nei punti di \dot{V} è *necessario conoscere il componente tangente ad S di $\bar{E}(P)$,*

$$\hat{n} \times \bar{E}(Q) \times \hat{n}, \quad Q \in S, \quad (7.3)$$

e quello di $\bar{H}(P)$,

$$\hat{n} \times \bar{H}(Q) \times \hat{n}, \quad Q \in S. \quad (7.4)$$

Pertanto se si vuole calcolare il campo nei punti di una regione limitata V con le formule dei paragrafi 4.7, 4.8 valide nello spazio libero, è necessario conoscere *entrambi* i componenti di $\bar{E}(P), \bar{H}(P)$ tangenti alla superficie S . Dato che con il teorema di unicità si è dimostrato che uno solo di tali componenti è sufficiente per definire il campo entro V , devono esistere condizioni del mezzo differenti dallo spazio libero (a causa di una disomogeneità in $V_\infty \setminus V$, dato che il mezzo entro V non può essere modificato) nelle quali una delle due correnti superficiali di densità $-\bar{J}_S(Q), -\bar{M}_S(Q)$ dà un contributo nullo alle intensità del campo entro V (chiaramente, l'altra, da sola, dovrà sostenere la totalità del campo nella nuova situazione del mezzo e ciò lo potrà fare per effetto delle correnti da lei stessa indotte nella disomogeneità). Nel seguito si vedrà quali siano le condizioni del mezzo in $V_\infty \setminus V$ di cui si è ora parlato.

7.2 Conduttori perfetti

Si definiscono conduttori perfetti i mezzi che impongono $\bar{E}(P) = \bar{H}(P) = 0$ al loro interno. Tali mezzi sono una astrazione matematica, ma essi descrivono bene situazioni reali nelle quali le intensità $\bar{E}(P)$

e $\overline{H}(P)$ assumono in una parte di V_∞ valori molto più piccoli di quelli che si stabiliscono nel resto di V_∞ . Un esempio tipico di quanto si è ora detto è offerto dai conduttori elettrici di conducibilità γ molto elevata (alluminio, rame, argento, oro, platino) che appunto “forzano” il campo ad assumere al loro interno intensità estremamente piccole rispetto a quelle al loro esterno (effetto pelle, gabbia di Faraday).

I conduttori perfetti possono essere sia elettrici, sia magnetici. Essi sono molto utili per imporre condizioni al contorno particolari.

7.2.1 Conduttore elettrico perfetto

Con riferimento a fig. 5.1 si supponga che in tutto $V_\infty \setminus V$ vi sia conduttore elettrico perfetto; per definizione di conduttore perfetto si ha allora

$$\overline{E}(P) = \overline{H}(P) = 0, \quad P \in V_\infty \setminus V, \quad (7.5)$$

ovvero ($P^+ \in V_\infty \setminus V$)

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \overline{E}(P^+) \times \hat{n} = \hat{n} \times \overline{H}(P^+) \times \hat{n} = 0, \\ P^+ \rightarrow Q \in S. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Peraltro, dato che il conduttore è elettrico, non sono sicuramente presenti correnti magnetiche di alcun tipo e quindi per la (5.22) si può scrivere ($P^+ \in V_\infty \setminus V$, $P^- \in \dot{V}$)

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \overline{E}(P^+) \times \hat{n} = \hat{n} \times \overline{E}(P^-) \times \hat{n}, \\ P^+, P^- \rightarrow Q \in S. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Dalla (7.7) e dalla prima delle (7.6) discende allora ($P^- \in \dot{V}$)

$$\hat{n} \times \overline{E}(P^-) \times \hat{n} = 0, \quad P^- \rightarrow Q \in S. \quad (7.8)$$

Se il conduttore elettrico perfetto è in tutto \dot{V} anzichè in tutto $V_\infty \setminus V$ (fig. 5.2), la (7.8) rimane valida con $P^- \in V_\infty \setminus V$ e

$$\overline{E}(P) = \overline{H}(P) = 0, \quad P \in \dot{V}. \quad (7.9)$$

La (7.8) informa che *un corpo conduttore elettrico perfetto, delimitato da una superficie S , impone alla $\overline{E}(P)$ presente al di fuori del conduttore di avere nullo il componente tangente alla superficie S* . Per quanto riguarda $\overline{H}(P)$, dalla (5.15) e dalla seconda delle (7.6) discende che quando il conduttore elettrico perfetto è in tutto $V_\infty \setminus V$ si ha

$$\overline{J}_S(Q) = -\hat{n} \times \overline{H}(P^-) = \overline{H}(P^-) \times \hat{n}, \quad P^- \rightarrow Q \in S, \quad (7.10)$$

con $P^- \in \dot{V}$, mentre se il conduttore è in \dot{V} la (7.10) è valida con $P^- \in V_\infty \setminus V$. Dato che il conduttore è elettrico, $\overline{J}_S(Q)$ può essere diversa da zero e in effetti ciò avviene sempre, per effetto del campo elettromagnetico dovuto ai generatori liberi situati al di fuori del conduttore elettrico perfetto. La corrente elettrica superficiale di densità $\overline{J}_S(Q)$ può essere interpretata come il limite di quella volumetrica indotta in un conduttore elettrico di conducibilità γ finita, al tendere all'infinito di γ (effetto pelle totale, si veda il paragrafo 7.3).

7.2.2 Conduttore magnetico perfetto

Analogamente, quando in tutto $V_\infty \setminus V$ vi è conduttore magnetico perfetto si ottiene

$$\hat{n} \times \overline{H}(P^-) \times \hat{n} = 0, \quad P^- \rightarrow Q \in S, \quad (7.11)$$

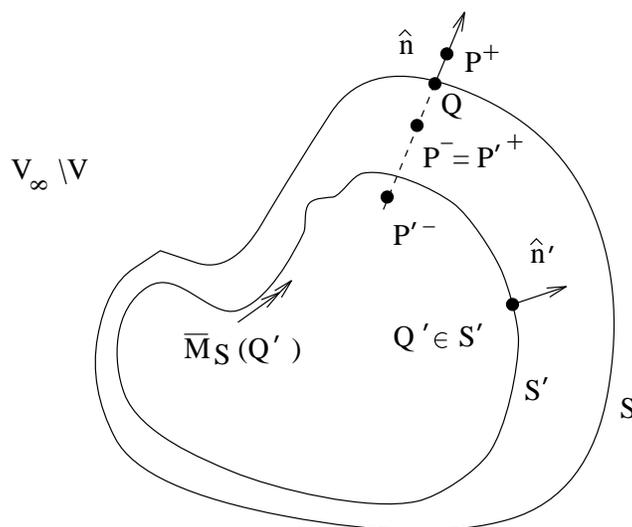


Figura 7.1: Imposizione della condizione al contorno $\hat{n} \times \bar{E}(Q) \times \hat{n}$.

con $P^- \in \dot{V}$, mentre se il conduttore è in tutto \dot{V} la (7.11) è valida con $P^- \in V_\infty \setminus V$. Pertanto *un corpo conduttore magnetico perfetto, delimitato da una superficie S , impone alla $\bar{H}(P)$ presente al di fuori del conduttore di avere nullo il componente tangente alla superficie S* . Dalla (7.10) si trae, per dualità,

$$\bar{M}_S(Q) = \hat{n} \times \bar{E}(P^-), \quad P^- \rightarrow Q \in S, \quad (7.12)$$

con $P^- \in \dot{V}$ se il conduttore magnetico perfetto è in tutto $V_\infty \setminus V$ e con $P^- \in V_\infty \setminus V$ quando tale conduttore è in tutto V . Pertanto nel caso di un conduttore magnetico perfetto è il componente di $\bar{E}(P)$ tangente alla superficie che delimita il conduttore, che in generale risulta diverso da zero per la presenza di una corrente superficiale magnetica indotta nel conduttore.

7.2.3 Correnti superficiali impresse in prossimità di conduttori perfetti

Si consideri ora la situazione di fig. 7.1 e si supponga che in tutto $V_\infty \setminus V$ vi sia conduttore elettrico perfetto così che $\hat{n} \times \bar{E}(P^-) \times \hat{n}$ tenda a zero quando P^- si avvicina al punto $Q \in S$. Considerata una nuova superficie $S' \subset \dot{V}$, prossima quanto si vuole ad S , si supponga ora che su di essa sia localizzata

una corrente superficiale magnetica di densità $\overline{M}_S(Q')$ con $Q' \in S'$; per la (5.22) si può scrivere

$$\begin{aligned} \hat{n}' \times [\overline{E}(P'^+) - \overline{E}(P'^-)] \times \hat{n}' &= \hat{n}' \times \overline{M}_S(Q'), \\ P'^+, P'^- &\rightarrow Q' \in S', \end{aligned} \quad (7.13)$$

ovvero, tenuto presente che è $P'^+ \equiv P^-$ e quindi che $\hat{n} \times \overline{E}(P'^+) \times \hat{n}$ tende a zero quando S' tende ad S ,

$$\hat{n} \times \overline{E}(P'^-) \times \hat{n} = \overline{M}_S(Q') \times \hat{n}, \quad P'^-, Q' \rightarrow Q \in S. \quad (7.14)$$

Dalla (7.14) si trae che mediante il conduttore elettrico perfetto localizzato in tutto $V_\infty \setminus V$ e la densità di corrente magnetica superficiale $\overline{M}_S(Q')$ applicata sulla superficie che lo delimita si impone la condizione al contorno del volume V fornita dalla (7.14) stessa. Ricordando che il teorema di unicità afferma che il campo elettromagnetico in una regione limitata V è univocamente determinato dai generatori localizzati in V e dalle condizioni al contorno, fornite da $\hat{n} \times \overline{E}(Q) \times \hat{n}$ *oppure* da $\hat{n} \times \overline{H}(Q) \times \hat{n}$, ciò significa che in presenza di conduttore elettrico perfetto in tutto $V_\infty \setminus V$ il campo entro V è sostenuto dai generatori $\overline{J}_1, \overline{M}_1$ localizzati in \hat{V} e da una corrente superficiale magnetica di densità $\overline{M}_S(Q') = \hat{n} \times \overline{E}(Q)$, localizzata su di una superficie S' che tende a coincidere con la superficie S ($Q' \rightarrow Q$).

Si può osservare che non è necessario che il conduttore perfetto invada tutto $V_\infty \setminus V$. Infatti il mezzo può essere cambiato a volontà laddove le intensità del campo sono nulle, senza alterare tali intensità nei rimanenti punti dello spazio. Pertanto basta “metallizzare” la superficie S , ovvero basta che il conduttore perfetto interessi la sola superficie S . Ne viene che il concetto di un volume sede di conduttore perfetto si estende al caso di una superficie (o di una linea) sede di conduttore perfetto. Nella pratica una superficie di conduttore perfetto viene approssimata con una lamina o una gabbia (gabbia di Faraday) di buon conduttore.

Un'ultima osservazione. L'eventuale presenza di una densità di corrente elettrica superficiale $\overline{J}_S(Q')$ su S' non modifica, per la (5.20), il valore di $\hat{n} \times \overline{E}(P'^-) \times \hat{n}$ quando S' tende ad S , ovvero la condizione al contorno $\hat{n} \times \overline{E}(Q) \times \hat{n}$ è indipendente dalla presenza o meno della $\overline{J}_S(Q')$. Poiché per il teorema di unicità ciò significa che pure il campo entro V rimane invariato, si può allora affermare che una corrente superficiale elettrica applicata sulla superficie di un conduttore elettrico perfetto dà campo nullo (si veda quanto detto in chiusura del paragrafo 7.1).

Analoghe proprietà si deducono per le correnti elettriche superficiali ed i conduttori magnetici perfetti. Altrettanto dicasi per il caso in cui i conduttori si trovano all'interno di S ed i generatori all'esterno di tale superficie.

7.2.4 Teoremi di Thévenin e di Norton

Alla luce di quanto si è detto in 7.2.3 si possono considerare due casi particolari molto importanti del teorema di induzione considerato nel paragrafo 6.4.

Il primo, che può essere interpretato come una estensione ai campi elettromagnetici del teorema di Thévenin [6] per i circuiti, è quello in cui in tutti i punti all'esterno di S vi è conduttore magnetico perfetto.

Il secondo è quello in cui in tutti i punti all'esterno di S vi è conduttore elettrico perfetto (teorema di Norton [6] nel caso dei circuiti).

7.3 Effetto pelle

Come si è detto in 7.2 la corrente superficiale di densità $\overline{J}_S(Q)$ che si stabilisce sulla superficie di un conduttore elettrico perfetto per effetto del campo elettromagnetico dovuto a generatori ad esso esterni può essere interpretata come illimitata della corrente volumetrica che verrebbe indotta dai generatori se il conduttore elettrico perfetto venisse sostituito da un conduttore elettrico con conducibilità γ tendente

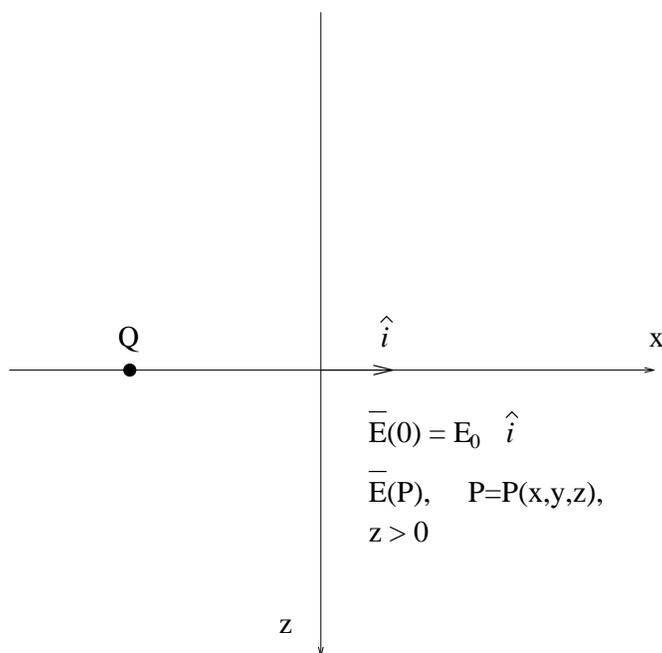


Figura 7.2: Situazione con mezzo di conducibilità γ nel semispazio $z > 0$.

all'infinito. Per convincersi di tale affermazione si consideri il caso particolarmente semplice di fig. 7.2, nel quale la superficie S è il piano $z = 0$ ed il volume V , sede di un mezzo omogeneo di conducibilità γ , è il semispazio $z > 0$.

Si supponga ora che alcuni generatori situati nel semispazio $z < 0$ impongano in $z > 0$ un campo elettrico $\bar{E}(P)$ di cui si sa soltanto che ha intensità

$$\bar{E}(Q) = E_0 \hat{i} \quad (7.15)$$

nei punti $Q = Q(x, y, 0)$, con E_0 costante reale. Fatta l'ipotesi di lavoro che il campo incognito non dipenda da x e da y ed abbia la sola componente secondo x , dalla (2.23) discende che l'unica componente $E(z)$ di $\bar{E}(P) = E_x(x, y, z) \hat{i} = E(z) \hat{i}$ soddisfa all'equazione

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} = \sigma^2 E(z) = -\omega^2 \mu \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) E(z), \quad (7.16)$$

ovvero, imponendo che $E(z)$ si annulli all'infinito ed assuma il valore E_0 per $z = 0$, che si può scrivere

$$E(z) = E_0 e^{-\sigma z}. \quad (7.17)$$

Dal fatto che la funzione vettoriale di punto

$$\bar{E}(P) = E_0 e^{-\sigma z} \hat{i} \quad (7.18)$$

soddisfa all'equazione di Helmholtz, alle condizioni all'infinito ed alle condizioni ai limiti per $z = 0$ si trae che la (7.18) fornisce il campo sostenuto dai generatori situati in $z < 0$ nei punti del mezzo conduttore situato in $z > 0$. Di conseguenza, in questi ultimi punti si ha una densità di corrente volumetrica indotta data da

$$\bar{J}_V(P) = J_V(z) \hat{i} = \gamma E_0 e^{-\sigma z} \hat{i}. \quad (7.19)$$

Poiché nell'ipotesi di γ grandissimo rispetto ad ε si ha

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{-\omega^2 \mu \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} \simeq \\ &\simeq \sqrt{j\omega \mu \gamma} = (1+j) \sqrt{\pi f \mu \gamma}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

ovvero

$$\sigma = \alpha + j\beta = (1+j)\alpha \quad (7.21)$$

con

$$\alpha = \sqrt{\pi f \mu \gamma}, \quad (7.22)$$

dalla (7.19) si trae che il modulo di $\bar{J}_V(P)$ decresce al crescere di z e che ciò avviene tanto più rapidamente quanto più grande è il prodotto γf . Pertanto, se si considerano praticamente significative soltanto le densità di corrente aventi il modulo maggiore di $|\bar{J}_V(0)|/e$, cioè di quello della densità di corrente che si ha per $z = 1/\alpha$, si può dire che la densità dicorrente è “confinata” entro uno strato di spessore p uguale a $1/\alpha$ (p viene denominata *profondità di penetrazione*). Poiché p diminuisce al crescere del prodotto γf , si può aggiungere immediatamente che, a parità di frequenza, lo spessore di cui sopra diviene sempre più sottile al tenderci γ all'infinito e quindi che, come si era anticipato, la situazione del buon conduttore approssima quanto si vuole quella del conduttore perfetto al crescere illimitato della conducibilità (si noti, tuttavia, che la corrente in un conduttore reale non diverrà mai esattamente superficiale, il che ribadisce l'affermazione, già fatta, che il conduttore perfetto è una pura astrazione matematica).

7.4 Principio delle immagini

Come si è già detto nel paragrafo 7.2, per quanto riguarda il campo in una regione V è del tutto equivalente che un conduttore elettrico perfetto occupi tutto $V_\infty \setminus V$ o soltanto la superficie S che delimita V . Questa proprietà, che è stata dedotta dall'esistenza di un effetto pelle totale, può anche essere interpretata come conseguenza del fatto che il conduttore elettrico perfetto impone $\hat{n} \times \bar{E}(Q) \times \hat{n} = 0$ nei punti Q della superficie S per cui l'intensità $\bar{E}(Q)$ risulta perpendicolare a tale superficie; infatti ciò significa che $\bar{E}(Q)$ sollecita le cariche ad uscire, secondo la normale, dalla superficie S , ma le cariche questo non possono farlo, per cui il campo $\bar{E}(Q)$ è del tutto indipendente dalla presenza o meno della superficie conduttrice. La conseguenza immediata di tale osservazione è che è lecito “metallizzare” (le virgolette informano che la proprietà vale sia per i conduttori elettrici, sia per quelli magnetici) una superficie in tutti i punti della quale il campo (elettrico per i conduttori elettrici, magnetico per quelli magnetici) abbia intensità perpendicolare alla superficie stessa. In elettrostatica quanto si è ora visto si traduce nella possibilità di metallizzare le superficie equipotenziali $p(P) = \text{costante}$, dato che queste ultime sono perpendicolari alla intensità del campo elettrico, $\bar{E}(P) = -\text{grad} p(P)$.

Infine si può mostrare che una conseguenza della proprietà sopra espressa è il *principio delle immagini*. Si consideri a tale scopo un insieme di sorgenti (\bar{J}_1, \bar{M}_1) e (\bar{J}_2, \bar{M}_2) e si supponga che una superficie S divida V_∞ in due parti in modo tale che (\bar{J}_1, \bar{M}_1) stiano da una parte di S e (\bar{J}_2, \bar{M}_2) dall'altra; si supponga inoltre che S sia scelta in modo tale che in tutti i suoi punti il campo elettrico

(magnetico) sostenuto dalla totalità dei generatori abbia intensità ortogonale ad S . Per quanto si è visto in precedenza, ciò permette di dire che la superficie S può essere o meno sede di conduttore elettrico (magnetico) perfetto, senza che il campo dovuto ai generatori (\bar{J}_1, \bar{M}_1) (\bar{J}_2, \bar{M}_2) ne risenta, ma ciò significa anche che quando il conduttore è presente lo spazio V_∞ è diviso in due parti fra loro indipendenti, per cui se si spengono i generatori (\bar{J}_2, \bar{M}_2) il campo dovuto a (\bar{J}_1, \bar{M}_1) rimane inalterato. Da questa osservazione discende l'enunciato del principio delle immagini: *data una sorgente (\bar{J}_1, \bar{M}_1) in presenza di uno specchio (superficie perfettamente conduttrice) che divide V_∞ in due parti (lo specchio può essere una superficie chiusa con tutti i punti al finito, oppure un piano, oppure un cilindro illimitato, ecc.) il campo sostenuto da (\bar{J}_1, \bar{M}_1) nella regione di V_∞ in cui hanno sede tali generatori si può ottenere, in assenza dello specchio, se si introducono opportuni generatori (\bar{J}_2, \bar{M}_2) che insieme a (\bar{J}_1, \bar{M}_1) sostengono un campo elettrico (magnetico) avente intensità elettrica (magnetica) ortogonale alla superficie nei punti della quale era localizzato lo specchio.* Le sorgenti (\bar{J}_2, \bar{M}_2) sono denominate l'immagine di (\bar{J}_1, \bar{M}_1) rispetto allo specchio considerato. In elettrostatica si ha, ad esempio, che l'immagine di una carica puntiforme positiva q rispetto ad uno specchio piano è una carica negativa $-q$ situata in posizione simmetrica (o speculare) a quella di q , rispetto al piano dello specchio.

Repetita iuvant

Si desidera qui sottolineare il fatto che il problema matematico che fornisce il modello per i Campi elettromagnetici, cioè le equazioni di Maxwell, è particolarmente elegante e sintetico.

A quanto detto, si deve però aggiungere che Maxwell non sarebbe mai giunto, probabilmente, alla sua formulazione se in precedenza non vi fosse stata una intensa attività sperimentale (Ampère, Faraday) che, passo a passo, aveva suggerito modelli matematici sempre più complessi e raffinati, per giungere infine al modello che il fisico-matematico scozzese completò con l'introduzione della corrente di spostamento.

In effetti, non si deve mai dimenticare che a monte e a valle di ogni teoria matematica sui fenomeni fisici, cioè in fase di formulazione del modello ed in quella di verifica della sua validità, vi sono sempre attività sperimentali.

Questa ovvia osservazione è importante da un punto di vista didattico, perché l'intervallo temporale che intercorre fra il momento della formulazione del modello matematico e quello del suo utilizzo può essere così lungo da indurre a credere che il modello sia la realtà.

Peraltro . . .

Non mangiare il menu



Appendice A

Distribuzioni

A.1 Introduzione

Le definizioni e le proprietà presentate nel seguito sono valide nello spazio euclideo a tre dimensioni $R^3 = V_\infty$, mentre si indica con P il punto generico di coordinate cartesiane ortogonali (x, y, z) .

Tutte le superficie e le linee che si considerano sono regolari o possono essere scomposte in superficie e linee regolari. Con lo stesso simbolo (l, S, V) si indicherà un insieme e la sua misura.

Le funzioni di punto hanno in evidenza la dipendenza da P (ad esempio $f(P)$ è una funzione di punto ed f non lo è); quando tale dipendenza in un simbolo non compare (ad esempio f o ε) il simbolo rappresenta una distribuzione se viene esplicitamente detto nel testo (ad esempio f potrebbe indicare una distribuzione, mentre ε è la permittività del mezzo).

Il fatto che non compaia il tempo t come variabile indipendente non esclude il caso in cui le funzioni di punto dipendono anche da t . Quando ciò avviene le funzioni sono sicuramente reali; nel caso contrario possono essere sia reali, sia complesse.

A.2 Distribuzioni scalari

A.2.1 Spazio delle funzioni di prova

è lo spazio F delle funzioni complesse adimensionali $\varphi(P)$ che sono infinitamente derivabili in tutto V_∞ e identicamente nulle al di fuori di un sottinsieme di V_∞ chiuso e limitato. La funzione $\varphi(P)$ nel seguito fa eccezione alla regola generale e viene di sovente indicata con la sola lettera φ , per non appesantire eccessivamente le formule.

A.2.2 Supporto di una funzione di prova

Il più piccolo insieme compatto, cioè chiuso e limitato, al di fuori del quale la funzione $f(P) \in F$ è identicamente nulla.

A.2.3 Successione convergente in F

Una successione di funzioni di prova $\varphi_i(P) \in F$ converge ad una funzione $\varphi(P)$ per $i \rightarrow \infty$ se esiste un insieme compatto $k \subset V_\infty$ al di fuori del quale tutte le $\varphi_i(P)$ sono identicamente nulle e se le $\varphi_i(P)$ e le loro derivate convergono uniformemente a $\varphi(P)$ ed alle sue derivate corrispondenti. Anche la $\varphi(P)$ è una funzione di prova: $\varphi(P) \in F$.

A.2.4 Funzionale

è una corrispondenza che associa ad ogni elemento di uno spazio di funzioni adimensionali uno scalare, eventualmente dotato di dimensioni.

A.2.5 Funzionale lineare

Un funzionale S è lineare se è

$$S(\varphi_1 + \varphi_2) = S(\varphi_1) + S(\varphi_2), \quad (\text{A.1})$$

$$S(\lambda\varphi) = \lambda S(\varphi). \quad (\text{A.2})$$

A.2.6 Funzionale continuo nello spazio F

Un funzionale S definito nello spazio F , tale che per ogni successione $\varphi_i(P)$ in F convergente a $\varphi(P)$ per $i \rightarrow \infty$ la successione numerica $S(\varphi_i)$ converge a $S(\varphi)$.

A.2.7 Sottospazio F_k

Il sottospazio di F formato dalle funzioni di prova $\varphi(P)$ aventi supporto $k \subset V_\infty$.

A.2.8 Distribuzione o funzione generalizzata scalare

è un funzionale lineare in F e continuo su ogni sottospazio $F_k \subset F$. Lo scalare che il funzionale T associa con la funzione di prova φ viene indicato con il simbolo $\langle T, \varphi \rangle$. Come si è già detto, $\langle T, \varphi \rangle$ può essere dotato di dimensioni.

A.2.9 Somma di due distribuzioni

$$\langle (T_1 + T_2), \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle. \quad (\text{A.3})$$

A.2.10 Prodotto di una distribuzione per uno scalare costante

$$\langle (\lambda T), \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle, \quad (\text{A.4})$$

con λ costante complessa.

A.2.11 Uguaglianza di distribuzioni

Due distribuzioni, T e U , sono uguali su un sottospazio F_k delle funzioni di prova se associano lo stesso scalare a tutte le funzioni di F_k .

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle U, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in F_k. \quad (\text{A.5})$$

Se è $F_k = F$ si sottintende $\forall \varphi \in F$ e si scrive

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle U, \varphi \rangle. \quad (\text{A.6})$$

A.2.12 Distribuzione generata da una funzione localmente sommabile

Se $[\int_K |f(P)|^2 dV]$ esiste finito per ogni compatto K in V_∞ la $f(P)$ genera una distribuzione f per la quale si ha

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{V_\infty} f(P) \varphi dV. \quad (\text{A.7})$$

Le dimensioni di $\langle f, \varphi \rangle$ dipendono da quelle di $f(P)$.

A.2.13 Distribuzioni di Dirac

Sono distribuzioni che non sono generate da funzioni localmente sommabili

Distribuzione di Dirac per un punto P : $\delta_{\bar{P}}$

È definita dalla

$$\langle \delta_{\bar{P}}, \varphi \rangle = \varphi(\bar{P}). \quad (\text{A.8})$$

Quando è $\bar{P} = 0$, cioè l'origine, si scrive δ anziché δ_0 e si ha

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0); \quad (\text{A.9})$$

$\langle \delta, \varphi \rangle$ è adimensionale.

Distribuzione di Dirac δ_l , per una linea l

È definita dalla (fig. A.1)

$$\langle \delta_l, \varphi \rangle = \int_l \varphi dl. \quad (\text{A.10})$$

Le dimensioni di $\langle \delta_l, \varphi \rangle$ sono quelle di una lunghezza: $[L]$. La definizione è valida anche per linee chiuse ($A \equiv B$).

Distribuzione di Dirac δ_S , per una superficie S

È definita dalla (fig. A.2)

$$\langle \delta_S, \varphi \rangle = \int_S \varphi dS. \quad (\text{A.11})$$

Le dimensioni di $\langle \delta_S, \varphi \rangle$ sono quelle di un'area $[L^2]$. La definizione è valida anche per superficie chiuse (prive di bordo l').

A.2.14 Distribuzione di Heaviside U_V , per un volume V

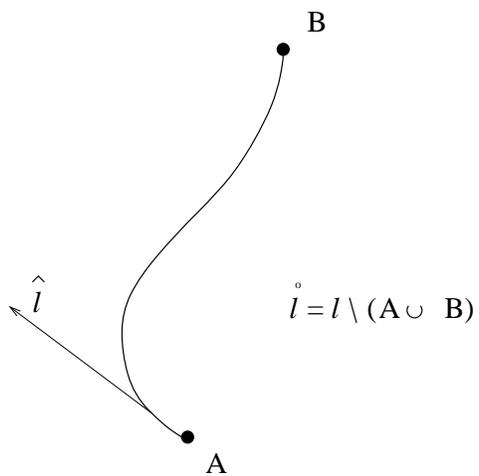
È la distribuzione generata dalla funzione localmente sommabile (fig. A.3)

$$U_V(P) = \begin{cases} 1 & P \in V \setminus S' = \dot{V}, \\ \text{indefinita} & P \in S', \\ 0 & P \in V_\infty \setminus V. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Pertanto (si veda la (A.7))

$$\langle U_V, \varphi \rangle = \int_{V_\infty} \varphi U_V(P) dV = \int_V \varphi dV. \quad (\text{A.13})$$

Le dimensioni di $\langle U_V, \varphi \rangle$ sono quelle di un volume: $[L^3]$.

Figura A.1: Supporto della distribuzione δ_l .

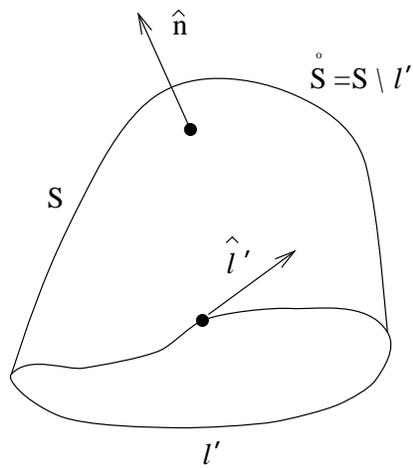
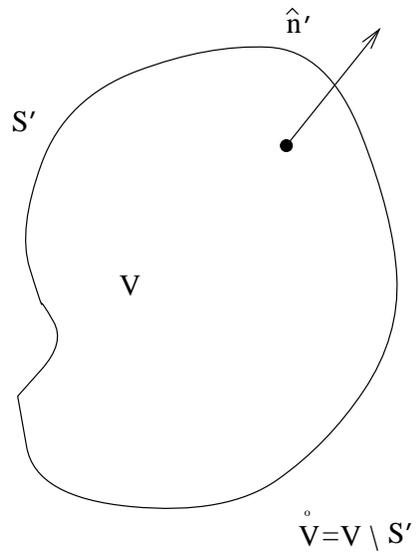


Figura A.2: Supporto della distribuzione δ_S .

Figura A.3: Supporto della distribuzione U_V .

A.2.15 Prodotto di una distribuzione per una funzione di punto

Il prodotto di una funzione di punto $f(P)$ per una qualsivoglia distribuzione T è una distribuzione se $f(P)$ è derivabile infinite volte in tutto V_∞ ; in tal caso infatti $f(P)\varphi(P)$ risulta essere a sua volta una funzione di prova e si può scrivere

$$\langle f(P)T, \varphi \rangle = \langle T, f(P)\varphi \rangle. \quad (\text{A.14})$$

Le dimensioni dello scalare $\langle f(P)T, \varphi \rangle$ dipendono dalle dimensioni della funzione $f(P)$. Per particolari scelte di $f(P)$ e T la (A.14) può definire un funzionale lineare e continuo su ogni sottospazio $F_k \subset F$ anche nel caso in cui $f(P)$ non sia derivabile infinite volte in V_∞ . Si può allora dire che anche in tali casi il prodotto $f(P)T$ è una distribuzione che associa alle $\varphi \in F_k$ gli scalari che si ottengono mediante il secondo membro della (A.14). Un caso particolare è quello in cui è $T = U_{V_\infty}$ ed $f(P)$ è una funzione localmente sommabile in V_∞ . Se si fa l'ipotesi che $f(P)$ sia derivabile infinite volte in V_∞ , $f(P)U_{V_\infty}$ è una distribuzione per la quale, dalla (A.14), si ricava

$$\langle f(P)U_{V_\infty}, \varphi \rangle = \langle U_{V_\infty}, f(P)\varphi \rangle = \int_{V_\infty} f(P)\varphi dV. \quad (\text{A.15})$$

Peraltro, l'ultimo termine della (A.15) ha ancora un significato preciso, anche se $f(P)$ non è derivabile infinite volte in V_∞ , e definisce un funzionale lineare e continuo su ogni sottospazio $F_k \subset F$. Si può anzi osservare che dal confronto fra la (A.7) e la (A.15) segue

$$f = f(P)U_{V_\infty}. \quad (\text{A.16})$$

A.2.16 Distribuzione localmente nulla e supporto di una distribuzione

Si dice che una distribuzione T si annulla in un aperto $\Omega \subset V_\infty$ se è

$$\langle T, \varphi \rangle = 0 \quad (\text{A.17})$$

per ogni φ di supporto $k \subset \Omega$. Si definisce supporto Σ di una distribuzione T l'insieme complementare del massimo insieme di V_∞ nel quale T si annulla.

A.2.17 Valore locale di una distribuzione in un punto

Se esiste una distribuzione f generata da una funzione localmente sommabile $f(P)$ tale che

$$\langle (T - f), \varphi \rangle = 0 \quad (\text{A.18})$$

per ogni φ di supporto $k \subset \Omega$ aperto, si attribuisce alla T il valore locale $f(P)$ limitatamente agli insiemi di punti di Ω in cui tale funzione risulta definita. Indicato con $T[P]$ il valore locale in P della distribuzione T , si ha quindi

$$T[P] = f(P) \quad (\text{A.19})$$

per ogni $P \in I$, se $f(P)$ è definita in tutto $I \subseteq \Omega$. Se la distribuzione T è lei stessa generata da una funzione sommabile $f(P)$ è $T = f$ e quindi è $T[P] = f(P)$ in tutti i punti nei quali la $f(P)$ è definita.

Ad esempio:

- si ha $\langle \delta_{\bar{P}}, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in F$ di supporto $k \subset \Omega = V_\infty \setminus \bar{P}$, quindi si può porre $f(P) = 0$ e si ha

$$\delta[P] = 0, \quad \forall P \in V_\infty \setminus \bar{P};$$

- si ha $\langle \delta_l, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in F$ di supporto $k \subset \Omega = V_\infty \setminus l$, quindi si può porre $f(P) = 0$ e si ha

$$\delta_l[P] = 0, \quad \forall P \in V_\infty \setminus l;$$

- si ha $\langle \delta_S, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in F$ di supporto $k \subset \Omega = V_\infty \setminus S$, quindi si può porre $f(P) = 0$ e si ha

$$\delta_S [P] = 0, \quad \forall P \in V_\infty \setminus S;$$

- poichè U_V è generata da $U_V(P)$, localmente sommabile, i valori locali di U_V coincidono con quelli di $U_V(P)$ dove questa è definita; quindi

$$U_V [P] = \begin{cases} 1 & P \in V \setminus S' = \dot{V}, \\ 0 & P \in V_\infty \setminus V, \end{cases}$$

con esclusione dell'insieme S' dove $U_V(P)$ è indefinita.

A.2.18 Derivata di una distribuzione

Indicata con D la derivata totale o parziale si ha, per definizione,

$$\langle DT, \varphi \rangle = - \langle T, D\varphi \rangle, \quad (\text{A.20})$$

cioè la distribuzione DT associa alla funzione di prova φ lo scalare che T associa alla funzione di prova $D[\varphi(P)]$, cambiato di segno. La definizione si applica ripetutamente per le derivate di ordine superiore al primo. Tutte le distribuzioni sono derivabili infinite volte. Si noti che se $f(P)$ è una funzione derivabile infinite volte in V_∞ si ha

$$\begin{aligned} \langle D[f(P)T], \varphi \rangle &= - \langle f(P)T, D\varphi \rangle = - \langle T, f(P)D\varphi \rangle = \\ &= - \langle T, D[f(P)\varphi] \rangle + \langle T, D[f(P)]\varphi \rangle = \\ &= \langle f(P)DT, \varphi \rangle + \langle TD[f(P)], \varphi \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

e quindi

$$D[f(P)T] = f(P)DT + TD[f(P)]. \quad (\text{A.22})$$

Nel caso in cui $f(P)$ non sia derivabile infinite volte in V_∞ ma soltanto in un aperto $\Omega \subset V_\infty$, si deve distinguere tra il caso in cui il supporto Σ della distribuzione T è contenuto in Ω e quello in cui Σ non è completamente contenuto in Ω . Nella prima ipotesi si deve innanzi tutto notare che per una generica funzione di prova $\varphi \in F$ il cui supporto k può contenere Σ (e quindi con valori non necessariamente nulli al di fuori di Σ), il contributo a $\langle T, \varphi \rangle$ deriva esclusivamente dai valori che φ assume entro Σ ; infatti se si vuole alterare φ al di fuori di Σ non vi è altra possibilità oltre a quella di aggiungere a φ una funzione φ' con supporto in $V_\infty \setminus \Sigma$ (cioè al di fuori del supporto Σ della distribuzione T), ma per le ipotesi fatte si ha

$$\langle T, (\varphi + \varphi') \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \varphi' \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in F, \varphi' \notin F_\Sigma \quad (\text{A.23})$$

e quindi $\langle T, (\varphi + \varphi') \rangle$ non risente della presenza di φ' . Ne viene che per la $f(P)T$ si ha

$$\langle f(P)T, (\varphi + \varphi') \rangle = \langle T, f(P)(\varphi + \varphi') \rangle = \langle T, f(P)\varphi \rangle, \quad (\text{A.24})$$

con il solo coinvolgimento dei valori di $f(P)$ nel supporto Σ . Peraltro si è nel caso in cui $\Sigma \subset \Omega$, quindi la derivabilità di $f(P)$ è assicurata nell'insieme Σ che interessa e la (A.22) vale qualunque sia $\varphi \in F$. Nell'altro caso, quando Σ non è completamente contenuto in Ω , l'esclusione dei punti di Σ nei quali $f(P)$ non è derivabile deve essere ottenuta limitando le funzioni di prova a quelle che hanno il supporto $k \subset \Omega$, per cui anzichè la (A.22) si deve scrivere

$$D[f(P)T] = f(P)DT + TD[f(P)], \quad \varphi \in F_k, k \subset \Omega, \quad (\text{A.25})$$

con il che si escludono i punti di Σ che non appartengono anche ad Ω e di conseguenza $f(P)$ è derivabile in tutti i punti che interessano la (A.25).

A.3 Distribuzioni vettoriali

Una distribuzione vettoriale è, per definizione, data da

$$\bar{T} = T_x \hat{i} + T_y \hat{j} + T_z \hat{k}, \quad (\text{A.26})$$

essendo T_x, T_y, T_z distribuzioni scalari. Pertanto è

$$\begin{aligned} \langle \bar{T}, \varphi \rangle &= \langle T_x, \varphi \rangle \hat{i} + \\ &+ \langle T_y, \varphi \rangle \hat{j} + \langle T_z, \varphi \rangle \hat{k}, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

con la stessa funzione di prova φ per tutte le componenti.

A.4 Equazioni nel senso delle distribuzioni

Un'uguaglianza fra due distribuzioni è una equazione nel senso delle distribuzioni se una di esse è incognita. Se, ad esempio, X è una distribuzione incognita ed A è una distribuzione nota

$$X = A \quad (\text{A.28})$$

è una equazione da intendersi nel senso delle distribuzioni, cioè

$$\langle X, \varphi \rangle = \langle A, \varphi \rangle. \quad (\text{A.29})$$

Da quanto si è visto in precedenza una distribuzione può essere una combinazione lineare di distribuzioni, per cui

$$X + Y = A + B, \quad (\text{A.30})$$

cioè

$$\langle X, \varphi \rangle + \langle Y, \varphi \rangle = \langle A, \varphi \rangle + \langle B, \varphi \rangle \quad (\text{A.31})$$

è ancora un'equazione nel senso delle distribuzioni se X, Y sono incognite ed A, B note. Nel caso particolare in cui il termine noto si possa scrivere ($V = \bigcup_{i=1}^r V_i, S = \bigcup_{i=1}^s S_i, l = \bigcup_{i=1}^t l_i, \mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^n \bar{P}_i$)

$$A = A_V(P)U_V + A_S(P)\delta_S + A_l(P)\delta_l + A_{\mathcal{E}}(P) \sum_{i=1}^n \delta_{\bar{P}_i} \quad (\text{A.32})$$

con $A_V(P), A_S(P), A_l(P), A_{\mathcal{E}}(P)$ definiti per $P \in V, P \in S, P \in l, P \in \mathcal{E}$, rispettivamente, posto

$$X = X_V(P)U_V + X_S(P)\delta_S + X_l(P)\delta_l + X_{\mathcal{E}}(P) \sum_{i=1}^n \delta_{\bar{P}_i}, \quad (\text{A.33})$$

con le funzioni $X_V(P), X_S(P), X_l(P), X_{\mathcal{E}}(P)$ incognite, la (A.28) diviene

$$\begin{aligned}
X_V(P)U_V + X_S(P)\delta_S + X_l(P)\delta_l + X_{\mathcal{E}}(P)\sum_{i=1}^n \delta_{\bar{P}_i} &= \\
= A_V(P)U_V + A_S(P)\delta_S + A_l(P)\delta_l + A_{\mathcal{E}}(P)\sum_{i=1}^n \delta_{\bar{P}_i}, & \quad (\text{A.34})
\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\int_V X_V(P)\varphi dV + \int_S X_S(P)\varphi dS + \int_l X_l(P)\varphi dl + \\
+ \sum_{i=1}^n X_{\mathcal{E}}(\bar{P}_i)\varphi(\bar{P}_i) &= \\
= \int_V A_V(P)\varphi dV + \int_S A_S(P)\varphi dS + \int_l A_l(P)\varphi dl + \\
+ \sum_{i=1}^n A_{\mathcal{E}}(\bar{P}_i)\varphi(\bar{P}_i), & \quad (\text{A.35})
\end{aligned}$$

per cui, tenendo conto che quest'ultima deve essere soddisfatta qualunque sia $\varphi \in F$, deve essere (il simbolo \doteq sta a significare l'uguaglianza "quasi dappertutto", ovvero all'infuori tutt'al più di un insieme di misura nulla)

$$X_V(P) \doteq A_V(P), \quad P \in V, \quad (\text{A.36})$$

$$X_S(P) \doteq A_S(P), \quad P \in S, \quad (\text{A.37})$$

$$X_l(P) \doteq A_l(P), \quad P \in l, \quad (\text{A.38})$$

$$X_{\mathcal{E}}(P) = A_{\mathcal{E}}(P), \quad P \in \mathcal{E}. \quad (\text{A.39})$$

Si noti che quanto ora detto introduce una regola simile a quella che vale per l'uguaglianza fra numeri complessi, uguaglianza che implica che siano fra di loro uguali le parti reali e le parti immaginarie. Si noti che le distribuzioni X ed A possono essere sia scalari sia vettoriali e che X e/o A possono essere distribuzioni ottenute operando su altre distribuzioni con operatori lineari (quali l'operatore D , visto in precedenza, oppure gli operatori *grad*, *div*, *rot*, ∇^2 per i quali si rimanda all'Appendice B).

In chiusura una osservazione sull'analisi dimensionale delle equazioni fra distribuzioni. Dato che la (A.35) deve essere dimensionalmente omogenea, cioè le unità di misura debbono essere le stesse per tutti i termini che in essa compaiono, le varie funzioni di punto non possono avere le stesse dimensioni perchè una è moltiplicata per la misura di un volume dV , l'altra per quella di una superficie dS e così via. Ciò comporta che l'analisi dimensionale della (A.34) non dà risultati corretti se non si ricorre all'artificio di assegnare a U_V , δ_S , δ_l , δ_{Q_i} opportune dimensioni; ad esempio

$$U_V \quad \text{adimensionale}, \quad (\text{A.40})$$

$$[\delta_S] = [L]^{-1}, \quad (\text{A.41})$$

$$[\delta_l] = [L]^{-2}, \quad (\text{A.42})$$

$$[\delta_Q] = [L]^{-3}, \quad (\text{A.43})$$

avendo indicato con $[L]$ le dimensioni di una lunghezza.

Appendice B

Calcolo vettoriale

B.1 Introduzione

In quanto segue, dopo un breve richiamo sul calcolo vettoriale valido per le funzioni ordinarie [2] si passerà a considerare il calcolo vettoriale nel caso delle funzioni generalizzate o distribuzioni. A tale scopo si farà riferimento ai simboli ed alle convenzioni di fig. B.1, fig. B.2 e fig. B.3.

In fig. B.1 una superficie chiusa S' (regolare o composta di superficie regolari) divide V_∞ in due regioni, una interna V ed una esterna $V_\infty \setminus V$. Il versore normale ad S' , \hat{n}' , che esiste in quasi tutti i punti di S' , è orientato dalla regione V alla regione $V_\infty \setminus V$. Il punto $P \in V$ potrà essere individuato o dalle tre coordinate (x, y, z) , di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, o da quelle (u_1, u_2, u_3) di un sistema di coordinate curvilinee.

In fig. B.2 una superficie S regolare di equazioni parametriche $x = x(u_1, u_2)$, $y = y(u_1, u_2)$, $z = z(u_1, u_2)$ è delimitata da una linea l' e ammette normale \hat{n} in tutti i suoi punti. Il versore \hat{n} nei punti di l' è ottenuto come limite di quello relativo a $\dot{S} = S \setminus \partial S = S \setminus l'$ e forma una terna destrorsa ortogonale con il versore \hat{v} (ortogonale ad l' e giacente nel piano tangente ad S) e con il versore \hat{l}' tangente alla linea l' . La superficie S può anche essere chiusa, nel qual caso non esiste il bordo l' . Il punto P su S o estremamente vicino ad S può essere individuato dalle tre coordinate (u_1, u_2, n) , essendo n la coordinata sulla retta normale ad S nel punto $(u_1, u_2, 0)$, crescente nel verso di \hat{n} . Le coordinate (u_1, u_2, n) vengono denominate coordinate laminari (relative ad S).

In fig. B.3 una linea C regolare di equazioni parametriche $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ è di estremi A e B ed ammette tangente \hat{l} in tutti i suoi punti. Il versore negli estremi A e B è ottenuto come limite di quello relativo a $\dot{l} = l \setminus (A \cup B)$. La linea C può anche essere chiusa, nel qual caso mancano gli estremi A e B . Il punto generico su C o estremamente vicino a C può venire individuato dalle tre coordinate curvilinee (r, φ, s) , essendo (r, φ) le coordinate che individuano un punto nel piano ortogonale a C e passante per $(0, 0, s)$, e s la coordinata curvilinea su C , crescente nel verso di \hat{l} . Le coordinate (r, φ, s) vengono denominate coordinate tubolari (relative a C).

Rimane da segnalare che nelle applicazioni possono essere contemporaneamente presenti più insiemi dei tipi considerati; in tal caso, se V_i , S_i , l_i sono insiemi regolari come quelli visti in precedenza, si avrà $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$, $S = \bigcup_{i=1}^r S_i$, $l = \bigcup_{i=1}^p l_i$, $S' = \bigcup_{i=1}^n S'_i$, $l' = \bigcup_{i=1}^r l'_i$, ed eventualmente unioni tra questi insiemi. Si dovranno infine anche prendere in considerazione punti isolati, $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^q \bar{P}_i$. All'insieme \mathcal{E} appartengono, in particolare, gli estremi di linee aperte eventualmente presenti, mentre ad l' appartengono i soli bordi delle superficie aperte e ad S' le sole superficie che delimitano i volumi.

B.2 Calcolo vettoriale per le funzioni ordinarie

Per comodità del lettore e per consentire un immediato confronto con le formule del prossimo paragrafo, si fa ora una rapida scorsa del calcolo vettoriale per le funzioni di punto ordinarie.

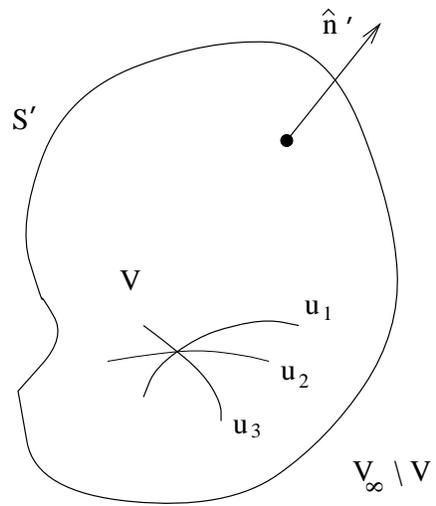


Figura B.1: Simboli e convenzioni adottate per domini di volume.

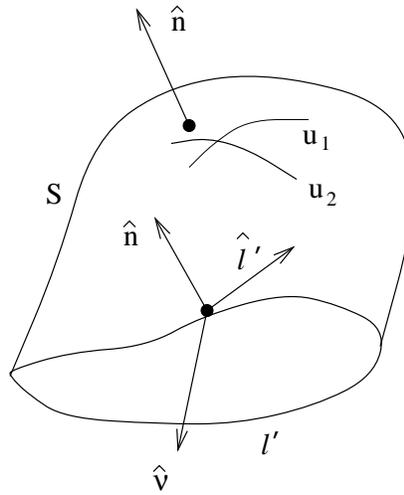


Figura B.2: Simboli e convenzioni adottate per domini di superficie.

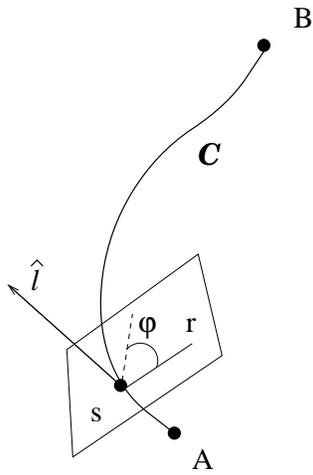
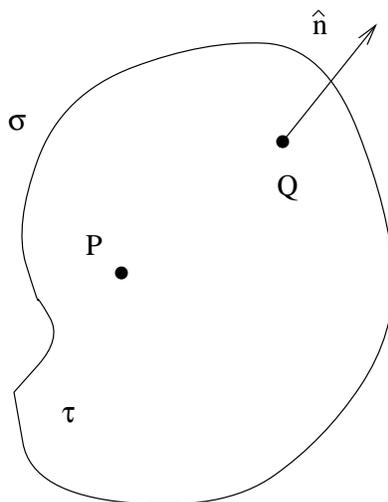


Figura B.3: Simboli e convenzioni adottate per domini di linea.

Figura B.4: Insieme τ contenente il punto P .

B.2.1 Operatori gradiente, divergenza e rotore nello spazio tridimensionale

Dato un insieme τ a cui appartiene il punto P , racchiuso da una superficie σ di normale \hat{n} (fig.B.4) si definiscono rispettivamente *gradiente* della funzione scalare $\varphi(P)$ e *divergenza* e *rotore* di una funzione vettoriale $\bar{A}(P)$ le quantità (τ nelle formule indica il volume dell'insieme τ)

$$\text{grad} [\varphi(P)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{\sigma} \hat{n}(Q) \varphi(Q) d\sigma, \quad (\text{B.1})$$

$$\text{div} [\bar{A}(P)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{\sigma} \hat{n}(Q) \cdot \bar{A}(Q) d\sigma, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{rot} [\bar{A}(P)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{\sigma} \hat{n}(Q) \times \bar{A}(Q) d\sigma, \quad (\text{B.3})$$

con $\varphi(P)$ e $\bar{A}(P)$ regolari in un dominio Ω comprendente l'insieme τ e con il volume τ tendente a zero in modo che tutti i punti dell'insieme τ tendano a P . In coordinate cartesiane si ha

$$\text{grad}[\varphi(P)] = \hat{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (\text{B.4})$$

$$\text{div}[\bar{A}(P)] = \hat{i} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \hat{j} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial z}, \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \text{rot}[\bar{A}(P)] &= \hat{i} \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \hat{j} \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} + \hat{k} \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} = \\ &= \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \hat{i} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \hat{j} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \hat{k}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

In un qualsiasi sistema di coordinate (pertanto anche in coordinate cartesiane) si dimostra

$$\text{rot grad}[\varphi(P)] = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\text{div rot}[\bar{A}(P)] = 0. \quad (\text{B.8})$$

Il laplaciano di una funzione scalare $\varphi(P)$ è dato, per definizione, da

$$\begin{aligned} \text{div grad}[\varphi(P)] &= \nabla^2[\varphi(P)] = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Il laplaciano di una funzione vettoriale $\bar{A}(P)$ è dato, per definizione, da

$$\begin{aligned} \nabla^2[\bar{A}(P)] &= -\text{rot rot}[\bar{A}(P)] + \text{grad div}[\bar{A}(P)] = \\ &= \nabla^2[A_x(P)]\hat{i} + \nabla^2[A_y(P)]\hat{j} + \nabla^2[A_z(P)]\hat{k}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Ricordando che è (D è il simbolo di derivata parziale rispetto a x , y o z)

$$D[f(P)g(P)] = f(P)D[g(P)] + D[f(P)]g(P), \quad (\text{B.11})$$

dalle (B.4) (B.5) (B.6) segue immediatamente

$$\text{grad}[f(P)g(P)] = f(P)\text{grad}[g(P)] + \text{grad}[f(P)]g(P), \quad (\text{B.12})$$

$$\text{div}[f(P)\bar{A}(P)] = f(P)\text{div}[\bar{A}(P)] + \text{grad}[f(P)] \cdot \bar{A}(P), \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \text{rot}[f(P)\bar{A}(P)] &= f(P)\text{rot}[\bar{A}(P)] + \\ &+ \text{grad}[f(P)] \times \bar{A}(P), \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \text{div}[\bar{A}(P) \times \bar{B}(P)] &= \bar{B}(P) \cdot \text{rot}[\bar{A}(P)] - \\ &- \bar{A}(P) \cdot \text{rot}[\bar{B}(P)], \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \text{rot}[\bar{A}(P) \times \bar{B}(P)] &= \bar{A}(P)\text{div}[\bar{B}(P)] - \bar{B}(P)\text{div}[\bar{A}(P)] + \\ &+ B_x(P) \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + B_y(P) \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} + B_z(P) \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} - \\ &- A_x(P) \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} - A_y(P) \frac{\partial \bar{B}}{\partial y} - A_z(P) \frac{\partial \bar{B}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

B.2.2 Alcune importanti relazioni vettoriali

Teorema di Gauss (si veda fig. B.1) Lo si dimostra nel modo seguente: mediante piani paralleli, si suddivide V in elementi di volume ΔV per ciascuno dei quali si può scrivere, per la (B.2), $\Delta V \text{div}[\bar{A}(P)] =$

$\sum \bar{A}(P) \cdot \hat{n} \Delta S$ (con $\sum \bar{A}(P) \cdot \hat{n} \Delta S$ si intende il flusso di $\bar{A}(P)$ attraverso le pareti di ΔV); si sommano membro a membro le uguaglianze scritte per tutti i volumetti; si calcola il limite per ΔV che tende a zero dei due membri dell'uguaglianza così ottenuta. Tenuto presente che le facce comuni a due volumetti contigui sono associate a flussi uguali in modulo, ma di segno opposto, si ha che al flusso danno contributo soltanto le facce esterne per cui se esistono i due limiti, a sinistra e a destra dell'uguale, si giunge alla (B.17).

$$\int_V \operatorname{div} [\bar{A}(P)] dV = \int_{S'} \bar{A}(P) \cdot \hat{n} dS'. \quad (\text{B.17})$$

Teorema di Stokes (si veda fig. B.2) Dimostrazione analoga a quella seguita per il Teorema di Gauss.

$$\int_S \operatorname{rot} [\bar{A}(P)] \cdot \hat{n} dS = \int_{l'} \bar{A}(P) \cdot \hat{l}' dl'. \quad (\text{B.18})$$

Teorema di Green (si dimostra applicando Gauss a $\bar{A}(P) = \varphi(P) \operatorname{grad} [\psi(P)]$)

$$\begin{aligned} \int_V \varphi(P) \nabla^2 [\psi(P)] dV &= \int_{S'} \varphi(P) \operatorname{grad} [\psi(P)] \cdot \hat{n} dS' - \\ &- \int_V \operatorname{grad} [\varphi(P)] \cdot \operatorname{grad} [\psi(P)] dV. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Scambiando fra loro $\varphi(P)$ e $\psi(P)$ si ottiene una relazione che sottratta membro a membro dalla (B.28) porta a scrivere

$$\begin{aligned} &\int_V \{ \varphi(P) \nabla^2 [\psi(P)] - \psi(P) \nabla^2 [\varphi(P)] \} dV = \\ &= \int_{S'} \left[\varphi(P) \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS'. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Facendo riferimento alla fig. B.5 si ponga $\varphi(Q) = 1/|P - Q| = 1/r$, con $P = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $Q = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$, $P \neq Q$. Si può verificare che è $\nabla'^2 \varphi(Q) = 0$. L'apice posto sul simbolo di laplaciano ha lo scopo di distinguere questo caso, in cui le derivazioni vengono fatte rispetto a x', y', z' , dal caso in cui le derivazioni vengono fatte rispetto a x, y, z , per il quale non viene utilizzato l'apice; le stesse considerazioni varranno, più avanti, per gli operatori grad' , div' , rot' , e grad , div , rot , rispettivamente. Si ponga inoltre $\psi(Q) = A_i(Q)$, ($i = x, y, z$), con $A_i(Q)$ componente del vettore $\bar{A}(Q) = A_x(Q)\hat{i} + A_y(Q)\hat{j} + A_z(Q)\hat{k}$. Si supponrà che $\bar{A}(Q)$ sia regolare in tutto lo spazio, intendendo con ciò non solo che $\bar{A}(Q)$ sia continua e derivabile in tutto lo spazio, ma anche che per r che tende a infinito $\bar{A}(Q)$ e le sue derivate tendano a zero più velocemente di $1/r$. Dalla (B.29) si ha

$$\begin{aligned} \int_{V \setminus V_P} \frac{1}{r} \nabla'^2 A_i(Q) dV_Q &= \int_{S'} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_i(Q)}{\partial n} - A_i(Q) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] dS' + \\ &+ \int_{S'_P} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_i(Q)}{\partial n} - A_i(Q) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] dS'_P. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Essendo $\bar{A}(Q)$ regolare, il primo integrale a secondo membro della (B.21) si annulla per V che tende a $V_\infty \setminus P$. Scegliendo poi S'_P come una superficie sferica centrata in P di raggio r tendente a zero, e ricordando che su S'_P è $\hat{n} = -\hat{r}$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{V_\infty \setminus P} \frac{\nabla'^2 A_i(Q)}{r} dV_Q &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{4\pi} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial A_i(Q)}{\partial r} + A_i(Q) \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right] r^2 d\Omega = \\ &= -A_i(P) \int_{4\pi} d\Omega = -4\pi A_i(P). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

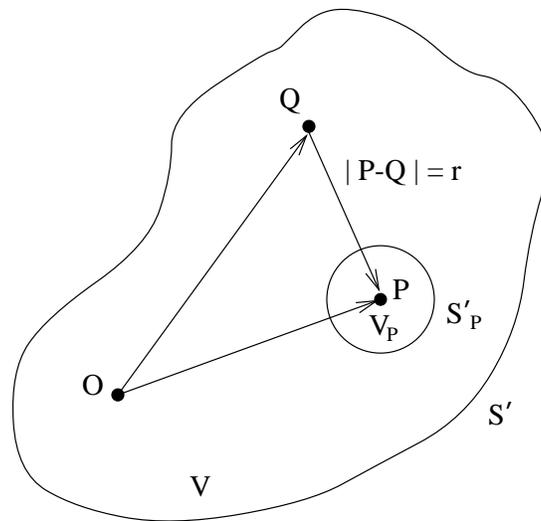


Figura B.5: Dominio utilizzato per la risoluzione dell'equazione di Poisson e per la dimostrazione del teorema di Helmholtz.

Per il vettore $\bar{A}(Q)$ si ha allora

$$\bar{A}(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty \setminus P} \frac{\nabla'^2 \bar{A}(Q)}{r} dV_Q, \quad (\text{B.23})$$

relazione che permette di ottenere il valore del vettore $\bar{A}(P)$ in un punto qualsiasi di V_∞ quando sia noto in tutto lo spazio il laplaciano del vettore stesso. Ciò porta ad affermare che l'*equazione di Poisson vettoriale*

$$\nabla^2 \bar{A}(P) = \bar{J}(P) \quad (\text{B.24})$$

ammette la soluzione

$$\bar{A}(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty \setminus P} \frac{\bar{J}(Q)}{r} dV_Q. \quad (\text{B.25})$$

Posto $f(P)\bar{A}(P) = \varphi(P)\bar{c}$, con \bar{c} vettore costante, dalla (B.13) segue

$$\begin{aligned} \text{div} [\varphi(P)\bar{c}] &= \varphi(P)\text{div}(\bar{c}) + \text{grad} [\varphi(P)] \cdot \bar{c} = \\ &= \text{grad} [\varphi(P)] \cdot \bar{c}. \end{aligned}$$

Applicando Gauss

$$\bar{c} \cdot \int_{S'} \varphi(P)\hat{n}dS' = \bar{c} \cdot \int_V \text{grad} [\varphi(P)] dV$$

e, per l'arbitrarietà di \bar{c} ,

$$\int_V \text{grad} [\varphi(P)] dV = \int_{S'} \varphi(P) \hat{n}' dS'. \quad (\text{B.26})$$

Dalla (B.15) con $\bar{B}(P) = \bar{c}$, vettore costante, si ha invece

$$\begin{aligned} \text{div} [\bar{A}(P) \times \bar{c}] &= \bar{c} \cdot \text{rot} [\bar{A}(P)] - \bar{A}(P) \cdot \text{rot}(\bar{c}) = \\ &= \bar{c} \cdot \text{rot} [\bar{A}(P)]. \end{aligned}$$

Applicando Gauss

$$\bar{c} \cdot \int_{S'} \hat{n}' \times \bar{A}(P) dS' = \bar{c} \cdot \int_V \text{rot} [\bar{A}(P)] dV$$

e, per l'arbitrarietà di \bar{c} ,

$$\int_V \text{rot} [\bar{A}(P)] dV = \int_{S'} \hat{n}' \times \bar{A}(P) dS'. \quad (\text{B.27})$$

Teorema di Green (si dimostra applicando Gauss a $\bar{A}(P) = \varphi(P)\text{grad} [\psi(P)]$)

$$\begin{aligned} \int_V \varphi(P)\nabla^2 [\psi(P)] dV &= \int_{S'} \varphi(P)\text{grad} [\psi(P)] \cdot \hat{n}dS' - \\ &- \int_V \text{grad} [\varphi(P)] \cdot \text{grad} [\psi(P)] dV. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Scambiando fra loro $\varphi(P)$ e $\psi(P)$ si ottiene una relazione che sottratta membro a membro dalla (B.28) porta a scrivere

$$\begin{aligned}
 & \int_V \{ \varphi(P) \nabla^2 [\psi(P)] - \psi(P) \nabla^2 [\varphi(P)] \} dV = \\
 & = \int_{S'} \left[\varphi(P) \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS'. \tag{B.29}
 \end{aligned}$$

Facendo ancora riferimento alla fig. B.5 si consideri una funzione $\bar{A}(Q)$ regolare in V_∞ ; ricordando le (B.10) (B.12) (B.14) (B.26) (B.27) e notando che è $\text{grad}'(1/r) = -\text{grad}(1/r)$, si verifica che é

$$\begin{aligned}
 & \int_{V \setminus V_P} \frac{\nabla'^2 \bar{A}(Q)}{r} dV_Q = \\
 & = \int_{V \setminus V_P} \left[\frac{\text{grad}' \text{div}' \bar{A}(Q)}{r} - \frac{\text{rot}' \text{rot}' \bar{A}(Q)}{r} \right] dV_Q = \\
 & = \int_{V \setminus V_P} \left\{ \text{grad}' \left[\frac{\text{div}' \bar{A}(Q)}{r} \right] - \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) \text{div}' \bar{A}(Q) \right\} dV_Q - \\
 & - \int_{V \setminus V_P} \left\{ \text{rot}' \left[\frac{\text{rot}' \bar{A}(Q)}{r} \right] - \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) \times \text{rot}' \bar{A}(Q) \right\} dV_Q = \\
 & = \int_{S'} \hat{n}' \frac{\text{div}' \bar{A}(Q)}{r} dS' + \int_{S'_P} \hat{n}' \frac{\text{div}' \bar{A}(Q)}{r} dS'_P - \\
 & - \int_{S'} \hat{n}' \times \frac{\text{rot}' \bar{A}(Q)}{r} dS' - \int_{S'_P} \hat{n}' \times \frac{\text{rot}' \bar{A}(Q)}{r} dS'_P + \\
 & + \int_{V \setminus V_P} \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) \text{div}' \bar{A}(Q) dV_Q - \\
 & - \int_{V \setminus V_P} \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) \times \text{rot}' \bar{A}(Q) dV_Q. \tag{B.30}
 \end{aligned}$$

Dato che $\text{div}' \bar{A}(Q)$ e $\text{rot}' \bar{A}(Q)$ risultano indipendenti da $P = P(x, y, z)$, dalle (B.10) (B.12) si ha

$$\begin{aligned}
 & \int_{V \setminus V_P} \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) \text{div}' \bar{A}(Q) dV_Q = \int_{V \setminus V_P} \text{grad}' \left[\frac{\text{div}' \bar{A}(Q)}{r} \right] dV_Q = \\
 & = \text{grad}' \left[\int_{V \setminus V_P} \frac{\text{div}' \bar{A}(Q)}{r} dV_Q \right], \tag{B.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{V \setminus V_P} \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) \times \text{rot}' \bar{A}(Q) dV_Q = \int_{V \setminus V_P} \text{rot}' \left[\frac{\text{rot}' \bar{A}(Q)}{r} \right] dV_Q = \\
 & = \text{rot}' \left[\int_{V \setminus V_P} \frac{\text{rot}' \bar{A}(Q)}{r} dV_Q \right], \tag{B.32}
 \end{aligned}$$

dove gli operatori grad e rot sono stati portati fuori dal segno di integrale, dato che essi agiscono nel punto $P = P(x, y, z)$ che non è la variabile di integrazione. Facendo ora tendere V a V_∞ , e tutti i punti di V_P al punto P , scegliendo S'_P come una superficie sferica centrata in P di raggio r tendente a zero, il primo ed il terzo integrale ad ultimo membro della (B.30) si annullano per la regolarità di

$\bar{A}(Q)$ mentre ricordando che su S'_P è $\hat{n}' = -\hat{r}$ si ha

$$\begin{aligned}
 & \int_{V_\infty \setminus P} \frac{\nabla'^2 \bar{A}(Q)}{r} dV_Q = \\
 & = \lim_{r \rightarrow 0} \left[- \int_{4\pi} \hat{r} \frac{\text{div}' \bar{A}(Q)}{r} r^2 d\Omega + \int_{4\pi} \hat{r} \times \frac{\text{rot}' \bar{A}(Q)}{r} r^2 d\Omega \right] + \\
 & + \lim_{V \rightarrow V_\infty, V_P \rightarrow P} \left\{ \text{grad} \left[\int_{V \setminus V_P} \frac{\text{div}' \bar{A}(Q)}{r} dV_Q \right] - \right. \\
 & - \left. \text{rot} \left[\int_{V \setminus V_P} \frac{\text{rot}' \bar{A}(Q)}{r} dV_Q \right] \right\} = \\
 & = \text{grad} \left[\int_{V_\infty \setminus P} \frac{\text{div}' \bar{A}(Q)}{r} dV_Q \right] - \\
 & - \text{rot} \left[\int_{V_\infty \setminus P} \frac{\text{rot}' \bar{A}(Q)}{r} dV_Q \right]. \tag{B.33}
 \end{aligned}$$

Ricordando la (B.23) si può infine scrivere

$$\begin{aligned}
 \bar{A}(P) = & - \text{grad} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty \setminus P} \frac{\text{div}' \bar{A}(Q)}{r} dV_Q \right] + \\
 & + \text{rot} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty \setminus P} \frac{\text{rot}' \bar{A}(Q)}{r} dV_Q \right]. \tag{B.34}
 \end{aligned}$$

La (B.34) esprime il *teorema di Helmholtz*, il quale afferma che *qualsunque campo vettoriale* $\bar{A}(P)$ *regolare in tutto lo spazio è esprimibile come somma di un campo irrotazionale* (cioè a rotore nullo) *e di un campo solenoidale* (cioè a divergenza nulla).

B.2.3 Operatori gradiente, divergenza e rotore in coordinate laminari

Divergenza in coordinate laminari

Si consideri un sistema di coordinate laminari (u_1, u_2, n) relative ad una superficie regolare S ed una funzione vettoriale di punto $\bar{A}(P)$ che ammette divergenza in un volume V contenente S (fig. B.6). Ci si propone di calcolare la divergenza della funzione $\bar{A}(P)$ nel suddetto sistema di coordinate in un punto $Q \in S$. Si assuma come volume τ il volume delimitato da $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_l$. Con tali ipotesi si può indicare con $\sigma(n)$ una funzione che varia da $\sigma(0)$, area di σ_1 , a $\sigma(h)$, area di σ_2 , quando la coordinata n lungo la normale varia da 0 ad h . Con riferimento alla fig. B.6 si ha: $Q_1, Q = Q(u_1, u_2, 0) \in \sigma_1 \subset S$, $Q_2 \in \sigma_2$; $Q_l \in \sigma_l$; $Q_\lambda \in \lambda \subset S$; $Q^- \in \sigma_1$; $Q^- \rightarrow Q_\lambda$, mentre i versori $\hat{\nu}(Q_\lambda)$, $\hat{\lambda}(Q_\lambda)$, tangente al bordo λ di σ , $\hat{n}(Q_\lambda)$, ortogonale a σ_1 costituiscono una terna ortogonale destrorsa. Indicati con \bar{Q}_1, \bar{Q}_2 i punti di σ_1 e σ_2 nei quali $\bar{A}(Q_1) \cdot \hat{n}_1(Q_1)$ e $\bar{A}(Q_2) \cdot \hat{n}_2(Q_2)$ assumono il loro valore medio su σ_1 e σ_2 si ha

$$\begin{aligned}
 & \{div[\bar{A}(P)]\}_{P=Q} = \\
 & = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\int_{\sigma_1} \bar{A}(Q_l) \cdot \hat{\nu}(Q_l) d\sigma_l + \int_{\sigma_2} \bar{A}(Q_2) \cdot \hat{n}_2(Q_2) d\sigma_2 + \right. \\
 & \left. + \int_{\sigma_1} \bar{A}(Q_1) \cdot \hat{n}_1(Q_1) d\sigma_1 \right] = \\
 & = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\{ \int_{\lambda} \left[\int_0^h \bar{A}(Q_l) \cdot \hat{\nu}(Q_l) dn \right] d\lambda + \sigma_2 \bar{A}(\bar{Q}_2) \cdot \hat{n}_2(\bar{Q}_2) + \right. \\
 & \left. + \sigma_1 \bar{A}(\bar{Q}_1) \cdot \hat{n}_1(\bar{Q}_1) \right\}. \tag{B.35}
 \end{aligned}$$

Tenuto conto che per σ_1 tendente a zero in modo che tutti i suoi punti tendano a Q il punto \bar{Q}_1 tende a Q , mentre \bar{Q}_2 viene a trovarsi sulla normale ad S per $Q(u_1, u_2, 0)$ così che si ha $Q_2 = Q_2(u_1, u_2, h)$, $\hat{n}_2(Q) = -\hat{n}_1(Q) = \hat{n}(Q)$, si possono scrivere le seguenti espressioni

$$\sigma_1 \bar{A}(\bar{Q}_1) \cdot \hat{n}_1(\bar{Q}_1) \simeq -\sigma(0) \bar{A}(u_1, u_2, 0) \cdot \hat{n}(Q) \tag{B.36}$$

$$\begin{aligned}
 & \sigma_2 \bar{A}(\bar{Q}_2) \cdot \hat{n}_2(\bar{Q}_2) \simeq \sigma(h) \bar{A}(u_1, u_2, h) \cdot \hat{n}(Q) \simeq \\
 & \simeq \sigma(0) \bar{A}(u_1, u_2, 0) \cdot \hat{n}(Q) + h \left\{ \frac{\partial}{\partial n} [\sigma(n) \bar{A}(u_1, u_2, n)] \right\}_{n=0} \cdot \hat{n}(Q),
 \end{aligned} \tag{B.37}$$

con le approssimazioni tanto più valide quanto più σ ed h sono piccoli. Per h sufficientemente piccolo si ha inoltre

$$\int_{\lambda} \int_0^h [\bar{A}(Q_l) \cdot \hat{\nu}(Q_l) dn] d\lambda \simeq h \int_{\lambda} \bar{A}(Q_{\lambda}) \cdot \hat{\nu}(Q_{\lambda}) d\lambda \tag{B.38}$$

per cui, posto $\tau = h\sigma(0)$, si ha

$$\begin{aligned}
 & \{div[\bar{A}(P)]\}_{P=Q} \simeq \\
 & \simeq \frac{1}{h\sigma(0)} \left(h \int_{\lambda} \bar{A}(Q_{\lambda}) \cdot \hat{\nu}(Q_{\lambda}) d\lambda + h \left\{ \frac{\partial}{\partial n} [\sigma(n) \bar{A}(u_1, u_2, n)] \right\}_{n=0} \cdot \hat{n}(Q) \right).
 \end{aligned} \tag{B.39}$$

Passando al limite per $\sigma(0)$ che tende a zero il segno di circa uguale viene sostituito da quello di uguale e si ha

$$\begin{aligned}
 & \{div[\bar{A}(P)]\}_{P=Q} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(0)} \int_{\lambda} \bar{A}(Q_{\lambda}) \cdot \hat{\nu}(Q_{\lambda}) d\lambda + \\
 & + \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(0)} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} [\sigma(n) \bar{A}(P)] \right\}_{P=Q} \cdot \hat{n}(Q) = \\
 & = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda} \bar{A}(Q_{\lambda}) \cdot \hat{\nu}(Q_{\lambda}) d\lambda + \\
 & + \left\{ \bar{A}(Q) \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial n} + \left[\frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n} \right]_{P=Q} \right\} \cdot \hat{n}(Q),
 \end{aligned} \tag{B.40}$$

avendo scritto, per semplicità, σ al posto di $\sigma(0)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial n}$ al posto di $\left[\frac{\partial \sigma(n)}{\partial n} \right]_{P=Q}$. Applicando la formula trovata ad $\bar{A}(P) = \hat{n}(P)$ si ha

$$\{div [\hat{n}(P)]\}_{P=Q} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial n} \quad (\text{B.41})$$

dato che $\hat{n}(P)$ e $\hat{\nu}(P)$ sono ortogonali, $\hat{n}(Q) \cdot \hat{n}(Q) = 1$ e $\frac{\partial \hat{n}(P)}{\partial n} = 0$. Pertanto, scritto, ancora per semplicità, $div(\hat{n})$ al posto di $\{div [\hat{n}(P)]\}_{P=Q}$ ed \hat{n} al posto di $\hat{n}(Q)$, si conclude

$$\begin{aligned} \{div [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda} \bar{A}(Q_{\lambda}) \cdot \hat{\nu}(Q_{\lambda}) d\lambda + \\ &+ \hat{n} \cdot \bar{A}(Q) div(\hat{n}) + \hat{n} \cdot \left[\frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n} \right]_{P=Q}. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Introducendo la *divergenza superficiale* (si ricordi che tutti i punti dell'insieme τ tendono a Q quando $\sigma = \sigma(0)$ tende a zero, e si noti che il secondo membro della (B.42) dipende esclusivamente dal comportamento di $\bar{A}(P)$ per $P = Q_{\lambda} \in S$)

$$div_S [\bar{A}(Q)] = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda} \bar{A}(Q_{\lambda}) \cdot \hat{\nu}(Q_{\lambda}) d\lambda \quad (\text{B.43})$$

si ha

$$\begin{aligned} \{div [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} &= div_S [\bar{A}(Q)] + \\ &+ \hat{n} \cdot \left\{ \bar{A}(Q) div(\hat{n}) + \left[\frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n} \right]_{P=Q} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Si può osservare che con procedura analoga a quella accennata per il teorema di Gauss (anziché suddividere il volume V in tanti volumetti, si deve suddividere la superficie S in tanti elementi superficiali, etc.) a partire dalla (B.43) si giunge a scrivere ($Q_{l'} \in l'$, bordo di S)

$$\int_S div_S [\bar{A}(Q)] dS = \int_{l'} \hat{\nu}(Q_{l'}) \cdot \bar{A}(Q_{l'}) dl'. \quad (\text{B.45})$$

Se $\hat{n} \cdot \bar{A}(P) = A_n(P)$ e $\hat{n} \cdot \frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n}$ sono entrambi nulli nei punti di S , $\bar{A}(Q) = \bar{A}_t(Q)$ è tangente ad S e si ha

$$\{div [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} = div_S [\bar{A}_t(Q)]. \quad (\text{B.46})$$

Gradiente in coordinate laminari

Posto $\bar{A}(P) = f(P)\bar{c}$, con \bar{c} vettore costante, arbitrario, e $f(P)$ derivabile in un aperto contenente S , dalla (B.13) e dalla (B.42) segue

$$\begin{aligned} \{div [f(P)\bar{c}]\}_{P=Q} &= \{grad [f(P)] \cdot \bar{c}\}_{P=Q} = \\ &= \bar{c} \cdot \left\{ \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda} f(Q_{\lambda}) \hat{\nu}(Q_{\lambda}) d\lambda + \hat{n} f(Q) div(\hat{n}) + \right. \\ &\left. + \hat{n} \left[\frac{\partial f(P)}{\partial n} \right]_{P=Q} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Poichè l'uguaglianza deve valere qualunque sia \bar{c} , se ne trae

$$\begin{aligned} \{grad [f(P)]\}_{P=Q} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda} f(Q_{\lambda}) \hat{\nu}(Q_{\lambda}) d\lambda + \\ &+ \hat{n} f(Q) div(\hat{n}) + \hat{n} \left[\frac{\partial f(P)}{\partial n} \right]_{P=Q}. \end{aligned} \quad (B.48)$$

Introducendo il *gradiente superficiale* (si ricordi che tutti i punti dell'insieme τ tendono a Q quando $\sigma = \sigma(0)$ tende a zero, e si noti che il secondo membro della (B.49) dipende esclusivamente dal comportamento di $f(P)$ per $P = Q_{\lambda} \in S$)

$$grad_S [f(Q)] = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda} f(Q_{\lambda}) \hat{\nu}(Q_{\lambda}) d\lambda \quad (B.49)$$

si ha

$$\begin{aligned} \{grad [f(P)]\}_{P=Q} &= grad_S [f(Q)] + \\ &+ \hat{n} \left\{ f(Q) div(\hat{n}) + \left[\frac{\partial f(P)}{\partial n} \right]_{P=Q} \right\}. \end{aligned} \quad (B.50)$$

Si può osservare che con procedura analoga a quella accennata per il teorema di Gauss (anziché suddividere il volume V in tanti volumetti, si deve suddividere la superficie S in tanti elementi superficiali, etc.) a partire dalla (B.49) si giunge a scrivere ($Q_{l'} \in l'$, bordo di S)

$$\int_S grad_S [f(Q)] dS = \int_{l'} f(Q_{l'}) \hat{\nu}(Q_{l'}) dl'. \quad (B.51)$$

Rotore in coordinate laminari

Considerata la funzione vettoriale $\bar{A}(P) \times \bar{c}$, con \bar{c} vettore costante, arbitrario, dalla (B.15) e dalla (B.42) scritta con $\bar{A}(P) \times \bar{c}$ al posto di $\bar{A}(P)$ segue

$$\begin{aligned} \{div [\bar{A}(P) \times \bar{c}]\}_{P=Q} &= \{\bar{c} \cdot rot [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} = \\ &= \bar{c} \cdot \left\{ \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda} \hat{\nu}(Q_{\lambda}) \times \bar{A}(Q_{\lambda}) d\lambda + \hat{n} \times \bar{A}(Q) div(\hat{n}) + \right. \\ &\left. + \hat{n} \times \left[\frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n} \right]_{P=Q} \right\}. \end{aligned} \quad (B.52)$$

Poichè l'uguaglianza deve valere qualunque sia \bar{c} , ne segue

$$\begin{aligned} \{rot [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda} \hat{\nu}(Q_{\lambda}) \times \bar{A}(Q_{\lambda}) d\lambda + \\ &+ \hat{n} \times \bar{A}(Q) div(\hat{n}) + \hat{n} \times \left[\frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n} \right]_{P=Q}. \end{aligned} \quad (B.53)$$

Introducendo il *rotore superficiale* (si ricordi che tutti i punti dell'insieme τ tendono a Q quando $\sigma = \sigma(0)$ tende a zero, e si noti che il secondo membro della (B.54) dipende esclusivamente dal comportamento di $\bar{A}(P)$ per $P = Q_{\lambda} \in S$)

$$rot_S [\bar{A}(Q)] = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda} \hat{\nu}(Q_{\lambda}) \times \bar{A}(Q_{\lambda}) d\lambda \quad (B.54)$$

si ha

$$\begin{aligned} \{rot [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} &= rot_S [\bar{A}(Q)] + \\ &+ \hat{n} \times \left\{ \bar{A}(Q) div(\hat{n}) + \left[\frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n} \right]_{P=Q} \right\}. \end{aligned} \quad (B.55)$$

Se $\hat{n} \times \bar{A}(P)$ e $\hat{n} \times \frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n}$ sono entrambi nulli nei punti di S , $\bar{A}(Q) = A_n(Q)\hat{n}$ è ortogonale alla superficie S e si ha

$$\{rot [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} = rot_S [\bar{A}(Q)]. \quad (B.56)$$

B.2.4 Operatori gradiente, divergenza e rotore in coordinate tubolari

Divergenza in coordinate tubolari

Si consideri un sistema di coordinate tubolari (r, φ, s) relativo ad una curva regolare \mathcal{C} ed una funzione vettoriale di punto $\bar{A}(P)$ che ammette divergenza in un volume V contenente \mathcal{C} . Ci si propone di calcolare la divergenza della $\bar{A}(P)$ nel suddetto sistema di coordinate in un punto $Q \in \mathcal{C}$. Si assuma come volume τ il volume delimitato da $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_l$, essendo σ_1 , σ_2 e σ_l le superficie delle basi e la superficie laterale del cilindretto che si ottiene facendo scorrere il centro del cerchio σ_1 lungo la linea \mathcal{C} , da $Q(0, 0, l)$ a $Q(0, 0, l+h)$. In tale ipotesi, σ_1 e σ_2 risultano avere la stessa area σ . Con riferimento alla fig. B.7 abbiamo: $Q_1, Q \in \sigma_1$; $Q_2 \in \sigma_2$; $Q_l \in \sigma_l$; $Q_\lambda \in \lambda$; $Q^- \rightarrow Q_\lambda$, mentre i versori $(\hat{r}(Q_\lambda), \hat{\varphi}(Q_\lambda), \hat{l}(Q^-))$ costituiscono una terna ortogonale destrorsa. Per la definizione di divergenza (B.2), indicati con \bar{Q}_1, \bar{Q}_2 i punti di σ_1 e σ_2 nei quali $\bar{A}(Q_1) \cdot \hat{l}_1(Q_1)$ e $\bar{A}(Q_2) \cdot \hat{l}_2(Q_2)$ assumono il loro valore medio su σ_1 e σ_2 si ha

$$\begin{aligned} \{div [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} &= \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\int_{\sigma_1} \bar{A}(Q_l) \cdot \hat{r}(Q_l) d\sigma_l + \int_{\sigma_2} \bar{A}(Q_2) \cdot \hat{l}_2(Q_2) d\sigma_2 + \int_{\sigma_1} \bar{A}(Q_1) \cdot \hat{l}_1(Q_1) d\sigma_1 \right] = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\{ \int_\lambda \left[\int_l^{l+h} \bar{A}(Q_l) \cdot \hat{r}(Q_l) ds \right] d\lambda - \sigma \bar{A}(\bar{Q}_1) \cdot \hat{l}_1(\bar{Q}_1) + \sigma \bar{A}(\bar{Q}_2) \cdot \hat{l}_2(\bar{Q}_2) \right\}. \end{aligned} \quad (B.57)$$

Tenuto conto che per τ tendente a zero in modo che tutti i suoi punti tendano a Q il punto \bar{Q}_1 tende a Q , mentre \bar{Q}_2 tende al punto di coordinate $(0, 0, l+h)$, ed è $\hat{l}_2(Q) \simeq \hat{l}(Q) \simeq -\hat{l}_1(Q)$, si possono scrivere le seguenti espressioni

$$\sigma \bar{A}(\bar{Q}_1) \cdot \hat{l}_1(\bar{Q}_1) \simeq -\sigma \bar{A}(Q) \cdot \hat{l}(Q), \quad (B.58)$$

$$\begin{aligned} \sigma \bar{A}(\bar{Q}_2) \cdot \hat{l}_2(\bar{Q}_2) &= \sigma \bar{A}(0, 0, l+h) \cdot \hat{l}(0, 0, l+h) \simeq \\ &\simeq \sigma \bar{A}(Q) \cdot \hat{l}(Q) + h\sigma \left\{ \frac{\partial [\bar{A}(s) \cdot \hat{l}(s)]}{\partial s} \right\}_{s=l}, \end{aligned} \quad (B.59)$$

avendo scritto, per semplicità, $\bar{A}(s)$ al posto di $\bar{A}(0, 0, s)$, ed $\hat{l}(s)$ al posto di $\hat{l}(0, 0, s)$, e con le approssimazioni tanto più valide quanto più σ ed h sono piccoli. Per h sufficientemente piccolo si ha anche

$$\int_\lambda \left[\int_l^{l+h} \bar{A}(Q_l) \cdot \hat{r}(Q_l) dl \right] d\lambda \simeq h \int_\lambda \bar{A}(Q_\lambda) \cdot \hat{r}(Q_\lambda) d\lambda, \quad (B.60)$$

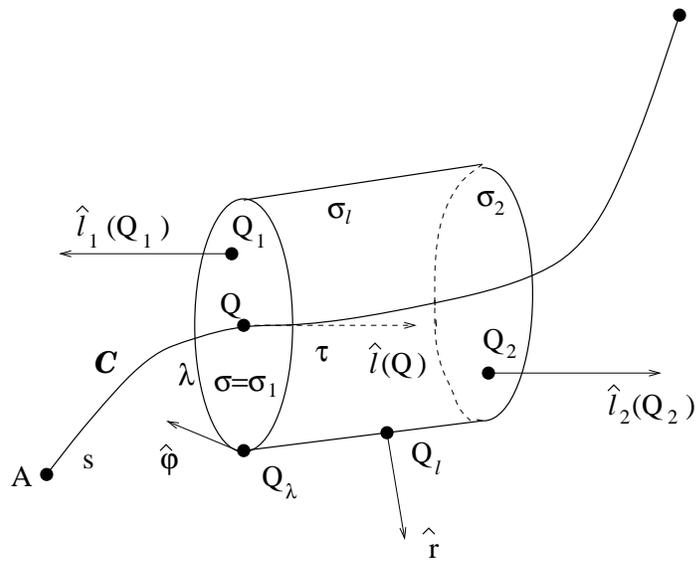


Figura B.7: Dominio utilizzato per ricavare l'espressione della divergenza in coordinate tubolari.

per cui, posto $\tau = h\sigma$ si ha

$$\begin{aligned} & \{div [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} \simeq \\ & \simeq \frac{1}{h\sigma} \left(h \int_{\lambda} \bar{A}(Q_{\lambda}) \cdot \hat{r}(Q_{\lambda}) d\lambda + h\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [\bar{A}(s) \cdot \hat{l}(s)] \right\}_{s=l} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

ovvero

$$\begin{aligned} & \{div [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} = \\ & = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda} \bar{A}(Q_{\lambda}) \cdot \hat{r}(Q_{\lambda}) d\lambda + \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [\bar{A}(s) \cdot \hat{l}(s)] \right\}_{s=l} = \\ & = \{div_t [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} + \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [\bar{A}(s) \cdot \hat{l}(s)] \right\}_{s=l}. \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Si può osservare che $\{div_t [\bar{A}(P)]\}_{P=Q}$, che può essere denominata *divergenza trasversale*, dipende solo dalle componenti di \bar{A} che giacciono nel piano ortogonale a \mathcal{C} passante per Q

Come ulteriore chiarimento del significato di questo termine viene ora ricavata la sua espressione qualora si prenda come sistema di riferimento sul piano ortogonale a \mathcal{C} passante per Q una coppia di versori (\hat{i}, \hat{j}) legata alla coppia $(\hat{r}, \hat{\varphi})$ dalle relazioni

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{\varphi} &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \end{aligned}$$

con $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{l})$ terna ortogonale destrorsa e φ angolo compreso fra \hat{r} e \hat{i} . Facendo tendere a 0 il raggio di σ si ha

$$\begin{aligned} & \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_{\lambda} \bar{A}(Q_{\lambda}) \cdot \hat{r}(Q_{\lambda}) d\lambda = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} [A_x(Q_{\lambda}) \hat{i} + A_y(Q_{\lambda}) \hat{j}] \cdot (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) r d\varphi = \\ & = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} [A_x(Q_{\lambda}) \cos \varphi + A_y(Q_{\lambda}) \sin \varphi] r d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

Prendendo in considerazione per ora solo il primo addendo della funzione integranda, e tenuto conto del fatto che per valori sufficientemente piccoli di r il valore di $A_x(Q_{\lambda})$ può essere ottenuto arrestando al secondo termine lo sviluppo di Taylor di $A_x(P)$ in $Q \in \mathcal{C}$ nella direzione di $Q_{\lambda} - Q$, si può scrivere

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} [A_x(Q) + r (\text{grad } A_x \cdot \hat{r})] \cos \varphi r d\varphi = \\ & = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{A_x(Q)}{\pi r} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) \cos \varphi d\varphi = \\ & = 0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial A_x}{\partial y} \sin \varphi \right] \cos \varphi d\varphi = \\ & = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right] + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial A_x}{\partial y} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right] = \frac{\partial A_x}{\partial x}. \end{aligned}$$

Con procedimento analogo, si può esprimere il secondo addendo dell'ultimo membro della (B.63) come $\frac{\partial A_y}{\partial y}$, per cui si conclude che

$$\{div_t [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} = \left[\frac{\partial A_x(P)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(P)}{\partial y} \right]_{P=Q}. \quad (\text{B.64})$$

Si noti che se $\bar{A}(Q_\lambda) = \bar{A}(Q)$, cioè il vettore $\bar{A}(P)$ è costante nel piano normale a \mathcal{C} in Q , nell'integrale a secondo membro della (B.62) la funzione integranda è costituita da contributi che si eliminano vicendevolmente, e quindi si ha

$$\{div [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} = \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [\bar{A}(s) \cdot \hat{l}(s)] \right\}_{s=l}. \quad (\text{B.65})$$

Gradiente in coordinate tubolari

Analogamente a quanto fatto per le coordinate laminari, dalla (B.13) e dalla (B.62) segue

$$\begin{aligned} & \{grad [f(P)]\}_{P=Q} = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_\lambda \hat{r}(Q_\lambda) f(Q_\lambda) d\lambda + \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [f(s) \hat{l}(s)] \right\}_{s=l} = \\ &= \{grad_t [f(P)]\}_{P=Q} + \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [f(s) \hat{l}(s)] \right\}_{s=l}. \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

Si può osservare che $\{grad_t [f(P)]\}_{P=Q}$, che può essere denominato *gradiente trasversale*, è un vettore giacente nel piano ortogonale a \mathcal{C} passante per Q

Con procedimento analogo a quello seguito per la divergenza trasversale, si ricava, prendendo come sistema di riferimento nel piano ortogonale a \mathcal{C} passante per Q una coppia di versori (\hat{i}, \hat{j})

$$\{grad_t [f(P)]\}_{P=Q} = \left[\frac{\partial A_x(P)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial A_y(P)}{\partial y} \hat{j} \right]_{P=Q}. \quad (\text{B.67})$$

Rotore in coordinate tubolari

Analogamente a quanto fatto per le coordinate laminari, dalla (B.15) e dalla (B.62) segue

$$\begin{aligned} & \{rot [\bar{A}(P)]\}_{P=Q} = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_\lambda \hat{r}(Q_\lambda) \times \bar{A}(Q_\lambda) d\lambda + \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [\hat{l}(s) \times \bar{A}(s)] \right\}_{s=l}. \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

B.3 Calcolo vettoriale per le funzioni generalizzate

B.3.1 Operatori differenziali. Definizioni

Gradiente

La distribuzione vettoriale

$$grad(T) = \hat{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{B.69})$$

è, per definizione, il gradiente della distribuzione scalare T . Per la proprietà delle distribuzioni scalari si ha

$$\begin{aligned} \langle grad(T), \varphi \rangle &= - \left[\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle \hat{i} + \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle \hat{j} + \right. \\ &\quad \left. + \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rangle \hat{k} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

Divergenza

La distribuzione scalare

$$\operatorname{div}(\bar{T}) = \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} \quad (\text{B.71})$$

è, per definizione, la divergenza della distribuzione vettoriale \bar{T} . Si ha anche

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(\bar{T}), \varphi \rangle &= - \left[\langle T_x, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle + \langle T_y, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle T_z, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

Rotore

La distribuzione vettoriale

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\bar{T}) &= \hat{i} \left(\frac{\partial T_z}{\partial y} - \frac{\partial T_y}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \hat{j} \left(\frac{\partial T_x}{\partial z} - \frac{\partial T_z}{\partial x} \right) + \\ &\quad + \hat{k} \left(\frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

è, per definizione, il rotore della distribuzione vettoriale \bar{T} . Si ha anche

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{rot}(\bar{T}), \varphi \rangle &= - \left\{ \left[\langle T_z, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle - \langle T_y, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rangle \right] \hat{i} + \right. \\ &\quad + \left[\langle T_x, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rangle - \langle T_z, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle \right] \hat{j} + \\ &\quad \left. + \left[\langle T_y, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle - \langle T_x, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle \right] \hat{k} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

Laplaciano

La distribuzione scalare

$$\nabla^2(T) = \operatorname{div} \operatorname{grad}(T) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{B.75})$$

è, per definizione, il laplaciano della distribuzione scalare T . Si ha anche

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2(T), \varphi \rangle &= \langle T, \nabla^2(\varphi) \rangle = \\ &= \left[\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \rangle + \langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

Laplaciano di un vettore

La distribuzione vettoriale

$$\begin{aligned} \nabla^2(\bar{T}) &= \operatorname{grad} \operatorname{div}(\bar{T}) - \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\bar{T}) = \\ &= \nabla^2 T_x \hat{i} + \nabla^2 T_y \hat{j} + \nabla^2 T_z \hat{k}, \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

essendo

$$\bar{T} = T_x \hat{i} + T_y \hat{j} + T_z \hat{k}, \quad (\text{B.78})$$

è, per definizione, il laplaciano della distribuzione vettoriale \bar{T} . Si ha anche

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 (\bar{T}), \varphi \rangle &= \langle \bar{T}, \nabla^2 \varphi \rangle = \\ &= \langle T_x, \nabla^2 \varphi \rangle \hat{i} + \langle T_y, \nabla^2 \varphi \rangle \hat{j} + \\ &+ \langle T_z, \nabla^2 \varphi \rangle \hat{k}. \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

B.3.2 Applicazione al prodotto di una distribuzione per una funzione di punto

Si considerino la distribuzione scalare T e le funzioni di punto scalare $f(P)$ e vettoriale $\bar{A}(P)$ e si supponga che $f(P)T$ ed $\bar{A}(P)T$ siano distribuzioni. Applicando le regole di derivazione (si veda A.2.18) alle distribuzioni $f(P)T$ e $\bar{A}(P)T$ si ottengono le seguenti relazioni

$$\langle \text{grad}[f(P)T], \varphi \rangle = - \langle T, \text{grad}(\varphi) f(P) \rangle, \quad (\text{B.80})$$

$$\langle \text{div}[\bar{A}(P)T], \varphi \rangle = - \langle T, \text{grad}(\varphi) \cdot \bar{A}(P) \rangle, \quad (\text{B.81})$$

$$\langle \text{rot}[\bar{A}(P)T], \varphi \rangle = - \langle T, \text{grad}(\varphi) \times \bar{A}(P) \rangle. \quad (\text{B.82})$$

Si noti come le formule ora scritte consentano di trasportare tutte le operazioni di derivazione sulla funzione di prova φ , senza che debbano essere assunte ipotesi particolari sulla derivabilità della funzione scalare $f(P)$ e della funzione vettoriale $\bar{A}(P)$. A tali funzioni, infatti, si chiede soltanto di definire dei funzionali lineari e continui su ogni $F_k \subset F$ mediante la $\langle T, f(P)\varphi \rangle$ o la $\langle T, \bar{A}(P)\varphi \rangle$, quando $f(P)\varphi$ o $A_i(P)\varphi$ ($i = x, y, z$) sono trattate come funzioni di prova. Si supponga ora che $f(P)$ e $\bar{A}(P)$ siano derivabili infinite volte in un aperto Ω e che il supporto di T sia contenuto in Ω ; per la (A.22) si può scrivere

$$\text{grad}[f(P)T] = T \text{grad}[f(P)] + \text{grad}(T) f(P), \quad (\text{B.83})$$

$$\text{div}[\bar{A}(P)T] = T \text{div}[\bar{A}(P)] + \text{grad}(T) \cdot \bar{A}(P), \quad (\text{B.84})$$

$$\text{rot}[\bar{A}(P)T] = T \text{rot}[\bar{A}(P)] + \text{grad}(T) \times \bar{A}(P), \quad (\text{B.85})$$

relazioni valide qualunque sia $\varphi \in F$ perchè gli scalari e i vettori che le varie distribuzioni associano alla funzione di prova dipendono soltanto dal comportamento di $f(P)$ o di $\bar{A}(P)$ nei punti del supporto di T , ove, per l'ipotesi fatta, sono derivabili infinite volte.

Se il supporto di T , anzichè essere contenuto in Ω , contiene Ω , le (B.83) (B.84) (B.85) non sono più valide qualunque sia $\varphi \in F$, ma lo rimangono soltanto per le funzioni di prova aventi supporto k contenuto in Ω o in qualsiasi aperto $\hat{\tau}$ a sua volta contenuto in Ω ; pertanto, in accordo con quanto convenuto in A.2.17 in tale caso si deve aggiungere

$$\varphi \in F_k, k \subset \hat{\tau}$$

a fianco di ciascuna formula, con $\hat{\tau} \subseteq \Omega$. Le (B.83) (B.84) (B.85) sono particolarmente utili quando si conosca il gradiente della distribuzione T . Nel seguito, tale gradiente verrà calcolato per le distribuzioni U_V , δ_S , δ_l partendo dalla (B.80). I risultati, introdotti nelle (B.83) (B.84) (B.85), portano ad alcune formule di grande interesse nello studio dei campi elettromagnetici.

Calcolo di $\text{grad}(U_V)$

Applicando la relazione (B.80) alla distribuzione di Heaviside U_V con $f(P) = 1$ si ottiene

$$\langle \text{grad}(U_V), \varphi \rangle = - \langle U_V, \text{grad}(\varphi) \rangle. \quad (\text{B.86})$$

Considerando il volume V racchiuso dalla superficie S' di normale \hat{n}' orientata verso l'esterno di S' , e ricordando la (B.26) si può peraltro scrivere

$$\begin{aligned} - \langle U_V, \text{grad}(\varphi) \rangle &= - \int_V \text{grad}(\varphi) dV = - \int_{S'} \varphi \hat{n}' dS = \\ &= - \langle \delta_{S'}, \hat{n}' \varphi \rangle = - \langle \delta_{S'} \hat{n}', \varphi \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

dalla quale discende

$$\text{grad}(U_V) = -\hat{n}' \delta_{S'}. \quad (\text{B.88})$$

Si può osservare che si ha $\text{grad}(U_{V_\infty}) = 0$ perchè, avendo le funzioni di prova supporto compatto, al tendere di V a V_∞ si finirà sempre con l'avere tutti i punti di S' al di fuori del supporto di φ , qualunque sia φ .

Calcolo di $\text{grad}(\delta_S)$

Applicando la relazione (B.80) alla distribuzione di Dirac δ_S con $f(P) = 1$ si ottiene

$$\langle \text{grad}(\delta_S), \varphi \rangle = - \langle \delta_S, \text{grad}(\varphi) \rangle. \quad (\text{B.89})$$

Peraltro in un sistema di coordinate laminari relative alla superficie S di bordo l' , per le (B.50) (B.51) si ha

$$\begin{aligned} - \langle \delta_S, \text{grad}(\varphi) \rangle &= - \int_S \text{grad}(\varphi) dS = \\ &= - \int_S \text{grad}_S(\varphi) dS - \int_S \hat{n} \varphi \text{div}(\hat{n}) dS - \int_S \hat{n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{P=Q} dS = \\ &= - \int_{l'} \varphi \hat{\nu}(Q_{l'}) dl' - \int_S \hat{n} \varphi \text{div}(\hat{n}) dS - \int_S \hat{n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{P=Q} dS = \\ &= - \langle \delta_{l'} \hat{\nu}, \varphi \rangle - \langle \delta_S \hat{n} \text{div}(\hat{n}), \varphi \rangle - \langle \hat{n} \delta_S, \frac{\partial \varphi}{\partial n} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.90})$$

Dato che, essendo $\frac{\partial \hat{n}}{\partial n} = 0$, si ha $- \langle \hat{n} \delta_S, \frac{\partial \varphi}{\partial n} \rangle = \langle \frac{\partial \hat{n} \delta_S}{\partial n}, \varphi \rangle = \langle \hat{n} \frac{\partial \delta_S}{\partial n}, \varphi \rangle$, si giunge infine alla relazione

$$\begin{aligned} \int_S \text{grad}_S(\varphi) dS &= \int_{l'} \varphi \hat{\nu}(Q_{l'}) dl' = \\ &= \langle \delta_{l'}, \varphi \hat{\nu} \rangle = \langle \delta_{l'} \hat{\nu}, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.91})$$

da cui si ottiene:

$$\text{grad}(\delta_S) = \hat{n} \frac{\partial \delta_S}{\partial n} - \hat{n} \text{div}(\hat{n}) \delta_S - \delta_{l'} \hat{\nu}. \quad (\text{B.92})$$

L'ultimo termine a secondo membro della (B.92) non compare se la superficie S è chiusa.

Calcolo di $\text{grad}(\delta_l)$

Applicando la relazione (B.80) alla distribuzione di Dirac δ_l con $f(P) = 1$, si ottiene

$$\langle \text{grad}(\delta_l), \varphi \rangle = - \langle \delta_l, \text{grad}(\varphi) \rangle. \quad (\text{B.93})$$

Peraltro in un sistema di coordinate tubolari relative alla linea C di estremi A e B , si ha, per la (B.66),

$$\begin{aligned}
 & - \langle \delta_l, \text{grad}(\varphi) \rangle = - \int_C (A \rightarrow B) \text{grad}(\varphi) dl = \\
 & = - \int_C (A \rightarrow B) \{ \text{grad}_t[\varphi(P)] \}_{P=Q} dl - \int_C (A \rightarrow B) \frac{\partial}{\partial s} [\varphi(s) \hat{l}(s)] ds = \\
 & = - \langle \delta_l, \text{grad}_t(\varphi) \rangle - \int_C (A \rightarrow B) \frac{\partial}{\partial s} [\varphi(s) \hat{l}(s)] ds.
 \end{aligned}$$

Dato che è $-\langle \delta_l, \text{grad}_t(\varphi) \rangle = \langle \text{grad}_t(\delta_l), \varphi \rangle$ (ciò può essere facilmente dimostrato nel sistema di riferimento utilizzato nella nota di pagina 103), si ha poi

$$\begin{aligned}
 & - \langle \delta_l, \text{grad}(\varphi) \rangle = \\
 & = \langle \text{grad}_t(\delta_l), \varphi \rangle - \hat{l}(B)\varphi(B) + \hat{l}(A)\varphi(A) = \\
 & = \langle \text{grad}_t(\delta_l), \varphi \rangle - \left[\langle \delta_B \hat{l}(B), \varphi \rangle - \langle \delta_A \hat{l}(A), \varphi \rangle \right], \tag{B.94}
 \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\text{grad}(\delta_l) = \text{grad}_t(\delta_l) - \delta_B \hat{l}(B) + \delta_A \hat{l}(A). \tag{B.95}$$

B.3.3 Applicazioni

Calcolo di $\text{grad}[f(P)U_V]$, $\text{div}[\bar{A}(P)U_V]$, $\text{rot}[\bar{A}(P)U_V]$

Applicando le (B.83, B.84, B.85), e ricordando la (B.88) otteniamo direttamente:

$$\text{grad}[f(P)U_V] = U_V \text{grad}[f(P)] - \delta_{S'} \hat{n}' f(P) \tag{B.96}$$

$$\text{div}[\bar{A}(P)U_V] = U_V \text{div}[\bar{A}(P)] - \delta_{S'} \hat{n}' \cdot \bar{A}(P) \tag{B.97}$$

$$\text{rot}[\bar{A}(P)U_V] = U_V \text{rot}[\bar{A}(P)] - \delta_{S'} \hat{n}' \times \bar{A}(P) \tag{B.98}$$

B.3.4 Alcuni casi particolari

Si considerano ora alcuni casi particolari, di rilevante interesse nello studio dei campi elettromagnetici.

Distribuzione $\text{rot}[\bar{A}(P)U_\tau]$, $\bar{A}(P)$ derivabile infinite volte nell'aperto $V \setminus S'$ contenente τ

Si consideri la distribuzione $\bar{A}(P)U_\tau$ di supporto τ , contenuto nell'aperto $\Omega = V \setminus S'$ (S' è la superficie che delimita V) nel quale $\bar{A}(P)$ è supposta derivabile infinite volte; dalle (B.85) (B.88) si trae

$$\begin{aligned}
 \text{rot}[\bar{A}(P)U_\tau] & = U_\tau \text{rot}[\bar{A}(P)] + \text{grad}U_\tau \times \bar{A}(P) = \\
 & U_\tau \text{rot}[\bar{A}(P)] - \hat{n} \times \bar{A}(P^-) \delta_{\sigma^-}, \tag{B.99}
 \end{aligned}$$

con il significato dei simboli e le convenzioni di fig. B.8.

Si noti che la (B.99) è valida per tutte le funzioni di prova $\varphi \in F$ perchè $V \setminus S' \supset \tau$ (si veda B.3.2).

Se si fa tendere τ a V il punto $P^- \in \sigma^-$ finisce col tendere al punto $Q \in S'$ muovendosi lungo la normale alla superficie S' in Q , per cui σ^- tende a S' ed \hat{n} ad \hat{n}' . Si ha pertanto

$$\text{rot}[\bar{A}(P)U_V] = U_V \text{rot}[\bar{A}(P)] - \hat{n}' \times \bar{A}(P^-) \delta_{S'}, \tag{B.100}$$

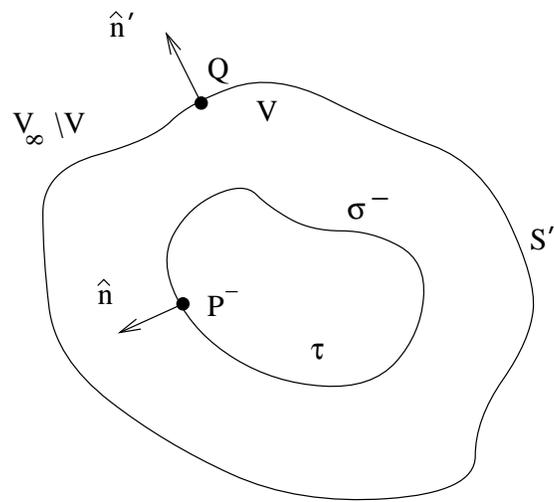


Figura B.8: Insieme τ interno a V .

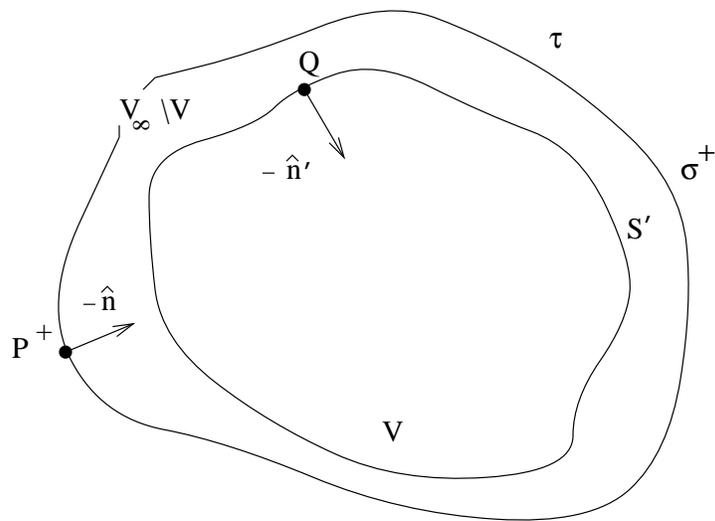


Figura B.9: Insieme τ esterno a V .

nella quale $\bar{A}(P^-)$ è il limite di $\bar{A}(P)$ quando P tende a Q provenendo dall'interno di S' e $\delta_{S'}$ ha preso il posto di δ_{σ^-} , con σ^- prossima quanto si vuole alla faccia interna di S' .

Si supponga ora che sia $\Omega = V_\infty \setminus V$. Essendo $V_\infty \setminus (V_\infty \setminus V) = V$, la situazione è quella di fig. B.9 nella quale si sono usati i simboli P^+ e σ^+ per enfatizzare che punto e superficie sono ora all'esterno di V . In tale caso si ha

$$\text{rot} [\bar{A}(P)U_{V_\infty \setminus V}] = U_{V_\infty \setminus V} \text{rot} [\bar{A}(P)] + \hat{n}' \times \bar{A}(P^+) \delta_{S'}, \quad (\text{B.101})$$

nella quale $\bar{A}(P^+)$ è il limite di $\bar{A}(P)$ quando P tende a Q provenendo dall'esterno di S' e $\delta_{S'}$ ha preso il posto di δ_{σ^+} , con σ^+ prossima quanto si vuole alla faccia esterna di S' .

Se la funzione $\bar{A}(P)$ è derivabile infinite volte nell'aperto $V_\infty \setminus S'$, unione degli aperti $V_\infty \setminus V$ e $V \setminus S'$, le (B.100) (B.101) sono entrambe valide, e possono essere riunite in un'unica espressione, sommandole membro a membro; si ottiene, per tale situazione

$$\begin{aligned} \text{rot} [\bar{A}(P)U_V + \bar{A}(P)U_{V_\infty \setminus V}] &= U_V \text{rot} [\bar{A}(P)] + U_{V_\infty \setminus V} \text{rot} [\bar{A}(P)] + \\ &+ \hat{n}' \times [\bar{A}(P^+) - \bar{A}(P^-)] \delta_{S'}. \end{aligned} \quad (\text{B.102})$$

Distribuzione $\text{div} [\bar{A}(P)U_{V_\infty}]$, $\bar{A}(P)$ derivabile infinite volte nell'aperto $V_\infty \setminus S'$

Con procedura analoga a quella appena seguita, partendo dalle (B.84) (B.88) si giunge a scrivere

$$\begin{aligned} \text{div} [\bar{A}(P)U_V + \bar{A}(P)U_{V_\infty \setminus V}] &= U_V \text{div} [\bar{A}(P)] + U_{V_\infty \setminus V} \text{div} [\bar{A}(P)] + \\ &+ \hat{n}' \cdot [\bar{A}(P^+) - \bar{A}(P^-)] \delta_{S'}. \end{aligned} \quad (\text{B.103})$$

Distribuzione $\text{div} [\bar{A}(P)\delta_S]$, $\bar{A}(P)$ derivabile infinite volte in un aperto contenente S

Essendo per ipotesi soddisfatta la condizione che il supporto di δ_S è contenuto in un aperto nel quale $\bar{A}(P)$ è derivabile (fig.B.10), si può utilizzare la (B.84) con $T = \delta_S$, per cui si può scrivere

$$\text{div} [\bar{A}(P)\delta_S] = \delta_S \text{div} [\bar{A}(P)] + \text{grad} \delta_S \cdot \bar{A}(P). \quad (\text{B.104})$$

Per le (B.44) (B.92) dalla (B.104) discende

$$\begin{aligned} \text{div} [\bar{A}(P)\delta_S] &= \\ &= \delta_S \text{div}_S [\bar{A}(Q)] + \bar{A}(Q) \cdot \hat{n} \text{div}(\hat{n}) \delta_S + \left[\frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n} \right]_{P=Q} \cdot \hat{n} \delta_S + \\ &+ \bar{A}(P) \cdot \hat{n} \frac{\partial \delta_S}{\partial n} - \bar{A}(Q) \cdot \hat{n} \text{div}(\hat{n}) \delta_S - \delta_\nu \hat{\nu} \cdot \bar{A}(Q_\nu). \end{aligned} \quad (\text{B.105})$$

Nella (B.105) si eliminano il secondo ed il quinto addendo a secondo membro, mentre è $\left[\frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n} \right]_{P=Q} \cdot \hat{n} \delta_S + \bar{A}(P) \cdot \hat{n} \frac{\partial \delta_S}{\partial n} = \frac{\partial \delta_S}{\partial n} \hat{n} \cdot \bar{A}(Q)$

Si può infatti scrivere (si tenga presente che $\hat{n} \cdot \bar{A}(Q)$ è indipendente da n)

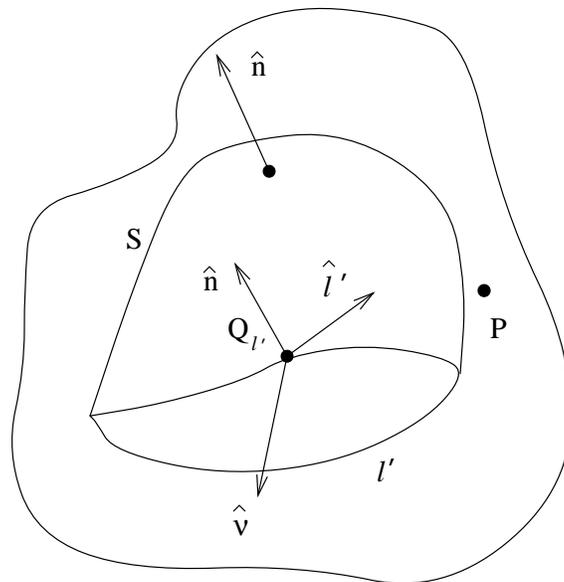


Figura B.10: Insieme aperto contenente S .

$$\begin{aligned}
 & \langle \delta_S \hat{n} \cdot \left[\frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n} \right]_{P=Q}, \varphi \rangle + \langle \frac{\partial \delta_S}{\partial n} \hat{n} \cdot \bar{A}(P), \varphi \rangle = \\
 & = \langle \delta_S, \hat{n} \cdot \left[\frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n} \right]_{P=Q} \varphi \rangle - \langle \delta_S, \left\{ \frac{\partial [\hat{n} \cdot \bar{A}(P) \varphi]}{\partial n} \right\}_{P=Q} \rangle = \\
 & = \int_S \hat{n} \cdot \left[\frac{\partial \bar{A}(P)}{\partial n} \right]_{P=Q} \varphi dS - \int_S \hat{n} \cdot \left\{ \frac{\partial [\bar{A}(P) \varphi]}{\partial n} \right\}_{P=Q} dS = \\
 & = - \int_S \hat{n} \cdot \bar{A}(Q) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{P=Q} dS = - \int_S \hat{n} \cdot \bar{A}(Q) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{P=Q} dS = \\
 & = - \langle \delta_S, \hat{n} \cdot \bar{A}(Q) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{P=Q} \rangle = - \langle \delta_S \hat{n} \cdot \bar{A}(Q), \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{P=Q} \rangle = \\
 & = \langle \frac{\partial \delta_S}{\partial n} \hat{n} \cdot \bar{A}(Q), \varphi \rangle. \tag{B.106}
 \end{aligned}$$

, per cui si perviene alla

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{div} [\bar{A}(P) \delta_S] = \\
 & = \delta_S \operatorname{div}_S [\bar{A}(Q)] + \bar{A}(Q) \cdot \hat{n} \frac{\partial \delta_S}{\partial n} - \delta_{l'} \hat{\nu} \cdot \bar{A}(Q_{l'}) = \\
 & = \operatorname{div} [\bar{A}(Q) \delta_S]. \tag{B.107}
 \end{aligned}$$

Un caso particolare importante è quello in cui è $\bar{A}(Q) \cdot \hat{n} = 0$, cioè $\bar{A}(Q)$ parallelo alla superficie S ; in tale ipotesi si ha

$$\operatorname{div} [\bar{A}(Q) \delta_S] = \delta_S \operatorname{div}_S [\bar{A}(Q)] - \delta_{l'} \hat{\nu} \cdot \bar{A}(Q^-), \tag{B.108}$$

con $Q^- \in S \setminus l'$ tendente al punto $Q_{l'} \in l'$.

Distribuzione $\operatorname{div} [\bar{A}(P) \delta_l]$, $\bar{A}(P)$ derivabile infinite volte in un aperto contenente \mathcal{C}

Essendo per ipotesi soddisfatta la condizione che il supporto di δ_l è contenuto in un aperto nel quale $\bar{A}(P)$ è derivabile (fig. B.11), si può utilizzare la (B.84) con $T = \delta_l$, per cui si può scrivere

$$\operatorname{div} [\bar{A}(P) \delta_l] = \delta_l \operatorname{div} [\bar{A}(P)] + \operatorname{grad} \delta_l \cdot \bar{A}(P). \tag{B.109}$$

Per le (B.62) (B.95) dalla (B.109) discende

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{div} [\bar{A}(P) \delta_l] = \\
 & = \delta_l \frac{\partial}{\partial s} [\bar{A}(s) \cdot \hat{l}(s)] + \delta_l \{ \operatorname{div}_t [\bar{A}(P)] \}_{P=Q} + \\
 & \quad + \left[\operatorname{grad}_t \delta_l - \delta_B \hat{l}(B) + \delta_A \hat{l}(A) \right] \cdot \bar{A}(P) = \\
 & = \delta_l \frac{\partial}{\partial s} [\bar{A}(s) \cdot \hat{l}(s)] + \left(\delta_l \{ \operatorname{div}_t [\bar{A}(P)] \}_{P=Q} + \operatorname{grad}_t \delta_l \cdot \bar{A}(P) \right) + \\
 & \quad + \left[-\delta_B \hat{l}(B) + \delta_A \hat{l}(A) \right] \cdot \bar{A}(P).
 \end{aligned}$$

Dato che è $\delta_l \{ \operatorname{div}_t [\bar{A}(P)] \}_{P=Q} + \operatorname{grad}_t \delta_l \cdot \bar{A}(P) = \operatorname{grad}_t \delta_l \cdot \bar{A}(Q)$ si ha poi

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} [\bar{A}(P) \delta_l] & = \delta_l \frac{\partial}{\partial s} [\bar{A}(s) \cdot \hat{l}(s)] + \operatorname{grad}_t \delta_l \cdot \bar{A}(Q) - \\
 & \quad - \delta_B \hat{l}(B) \cdot \bar{A}(P) + \delta_A \hat{l}(A) \cdot \bar{A}(P) = \\
 & = \operatorname{div} [\bar{A}(Q) \delta_l]. \tag{B.110}
 \end{aligned}$$

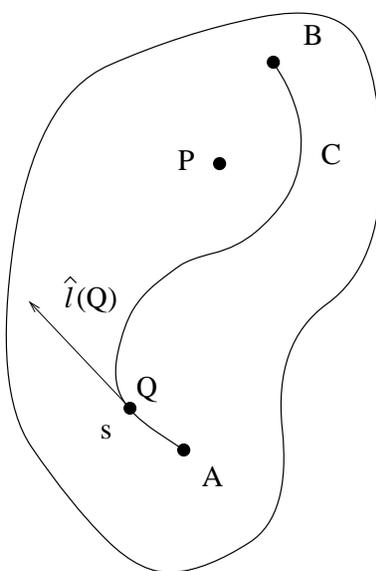


Figura B.11: Insieme aperto contenente C .

Un caso particolare importante è quello in cui è $\bar{A}(Q) = I(Q)\hat{l}(Q) = I(s)\hat{l}(s)$, cioè $\bar{A}(Q)$ parallelo alla linea \mathcal{C} ; in tale ipotesi si ha

$$\operatorname{div}[\bar{A}(Q)\delta_l] = \delta_l \frac{\partial}{\partial s} [I(s)] - \delta_B I(B) + \delta_A I(A). \quad (\text{B.111})$$

Appendice C

Vettori complessi e vettori variabili sinusoidalmente nel tempo

C.1 Campi vettoriali sinusoidali

Un vettore si dice sinusoidale quando le sue componenti variano sinusoidalmente nel tempo con la stessa pulsazione. Ad esempio

$$\bar{E}_{\sim} = E_{\sim x}\hat{i} + E_{\sim y}\hat{j} + E_{\sim z}\hat{k} \quad (\text{C.1})$$

è sinusoidale se si ha

$$E_{\sim x} = E_{xM}\cos(\omega t + \theta_x), \quad (\text{C.2})$$

$$E_{\sim y} = E_{yM}\cos(\omega t + \theta_y), \quad (\text{C.3})$$

$$E_{\sim z} = E_{zM}\cos(\omega t + \theta_z). \quad (\text{C.4})$$

Introducendo le (C.2), (C.3), (C.4), nella (C.1) si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\sim} &= E_{xM}\cos(\omega t + \theta_x)\hat{i} + E_{yM}\cos(\omega t + \theta_y)\hat{j} + \\ &+ E_{zM}\cos(\omega t + \theta_z)\hat{k} = \\ &= \cos(\omega t)(E_{xM}\cos\theta_x\hat{i} + E_{yM}\cos\theta_y\hat{j} + E_{zM}\cos\theta_z\hat{k}) + \\ &- \sin(\omega t)(E_{xM}\sin\theta_x\hat{i} + E_{yM}\sin\theta_y\hat{j} + E_{zM}\sin\theta_z\hat{k}) = \\ &= \bar{E}_1\cos(\omega t) - \bar{E}_2\sin(\omega t), \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

avendo posto

$$\bar{E}_1 = E_{xM}\cos\theta_x\hat{i} + E_{yM}\cos\theta_y\hat{j} + E_{zM}\cos\theta_z\hat{k}, \quad (\text{C.6})$$

$$\bar{E}_2 = E_{xM}\sin\theta_x\hat{i} + E_{yM}\sin\theta_y\hat{j} + E_{zM}\sin\theta_z\hat{k}. \quad (\text{C.7})$$

Si noti che i vettori \bar{E}_1 ed \bar{E}_2 sono reali ed indipendenti dal tempo.

C.2 Vettori complessi e vettori sinusoidali

Le (C.2), (C.3), (C.4) si possono anche scrivere

$$\begin{aligned} E_{\sim x} &= \frac{1}{2} (E_{xM} e^{j\theta_x} e^{j\omega t} + E_{xM} e^{-j\theta_x} e^{-j\omega t}) = \\ &= \frac{1}{2} (E_x e^{j\omega t} + E_x^* e^{-j\omega t}), \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} E_{\sim y} &= \frac{1}{2} (E_{yM} e^{j\theta_y} e^{j\omega t} + E_{yM} e^{-j\theta_y} e^{-j\omega t}) = \\ &= \frac{1}{2} (E_y e^{j\omega t} + E_y^* e^{-j\omega t}), \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} E_{\sim z} &= \frac{1}{2} (E_{zM} e^{j\theta_z} e^{j\omega t} + E_{zM} e^{-j\theta_z} e^{-j\omega t}) = \\ &= \frac{1}{2} (E_z e^{j\omega t} + E_z^* e^{-j\omega t}), \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

avendo posto

$$Ex = E_{xM} e^{j\theta_x}, \quad (\text{C.11})$$

$$Ey = E_{yM} e^{j\theta_y}, \quad (\text{C.12})$$

$$Ez = E_{zM} e^{j\theta_z}, \quad (\text{C.13})$$

ed intendendo con E_i^* il complesso coniugato di E_i . Posto

$$\bar{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}, \quad (\text{C.14})$$

si ha dalla (C.1) e dalle (C.8), (C.9), (C.10):

$$\bar{E}_{\sim} = \frac{1}{2} (\bar{E} e^{j\omega t} + \bar{E}^* e^{-j\omega t}) = \mathcal{Re} [\bar{E} e^{j\omega t}]. \quad (\text{C.15})$$

Ad \bar{E} si dà il nome di vettore complesso, rappresentativo del vettore reale \bar{E}_{\sim} . Il vettore complesso si può anche porre nella forma

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + j\bar{E}_2, \quad (\text{C.16})$$

nella quale \bar{E}_1 ed \bar{E}_2 sono i vettori reali dati dalle (C.6), (C.7) come si verifica senza difficoltà. Dalla (C.15) si deduce che dalla conoscenza del vettore complesso si può risalire alla conoscenza del vettore reale. Nei paragrafi che seguono si studieranno i vettori complessi e i vettori reali istantanei da essi rappresentati; in particolare verrà mostrato come sia possibile risalire alle proprietà di un vettore istantaneo dalla conoscenza di alcuni parametri dipendenti dalle componenti, in date basi, del vettore complesso ad esso corrispondente.

C.3 Proprietà dei vettori complessi

Dalla (C.16) segue che il più generale vettore complesso rappresentativo di un vettore reale sinusoidale, è sempre esprimibile come una combinazione lineare di due soli vettori reali, con coefficienti 1 e j . Lo studio di un dato vettore complesso si semplifica notevolmente se si sceglie, come terna cartesiana di riferimento, una terna il cui piano coordinato $z = 0$ coincide con il piano individuato dai vettori reali \bar{E}_1, \bar{E}_2 ; in tal caso si ha infatti $E_z = 0$ e quindi, da (C.14), (C.16)

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + j\bar{E}_2 = E_x \hat{i} + E_y \hat{j}. \quad (\text{C.17})$$

La (C.17) informa che un vettore complesso rappresentativo di un vettore sinusoidale è completamente individuato, in un particolare sistema di riferimento, da una coppia ordinata di numeri complessi, $E_x,$

E_y . Fatta l'ipotesi che tutti i vettori complessi che si considerano siano associati con vettori reali giacenti nello stesso piano (in un paragrafo successivo verrà considerato il caso più generale in cui questa ipotesi non è verificata), il prodotto scalare di due vettori complessi (ad esempio $\overline{E} \cdot \overline{J}$) viene definito nel seguente modo

$$\overline{E} \cdot \overline{J} = \overline{E}_1 \cdot \overline{J}_1 - \overline{E}_2 \cdot \overline{J}_2 + j(\overline{E}_1 \cdot \overline{J}_2 + \overline{E}_2 \cdot \overline{J}_1), \quad (\text{C.18})$$

si dice poi vettore normale o versore un vettore complesso di norma unitaria, cioè tale che sia

$$\hat{u} \cdot \hat{u}^* = 1 \quad (\text{C.19})$$

ed ortogonali due vettori $\overline{U}, \overline{V}$ tali che il prodotto scalare dell'uno per il coniugato dell'altro sia nullo, cioè

$$\overline{U} \cdot \overline{V}^* = \overline{U}^* \cdot \overline{V} = 0. \quad (\text{C.20})$$

Scelta una coppia di versori ortogonali \hat{u}, \hat{v} ($\hat{u} \cdot \hat{u}^* = 1; \hat{v} \cdot \hat{v}^* = 1; \hat{u} \cdot \hat{v}^* = 0$), si dice che essa è una base ortonormale per i vettori complessi considerati, intendendo con ciò che il vettore complesso generico può sempre scriversi come una combinazione lineare di \hat{u}, \hat{v}

$$\overline{E} = E_u \hat{u} + E_v \hat{v}; \quad (\text{C.21})$$

l'attendibilità della (C.21) segue dalla possibilità di ricavare E_x ed E_y a partire da E_u ed E_v scrivendo \hat{u} e \hat{v} come combinazioni lineari di \hat{i} e \hat{j} e viceversa. Dalla (C.21) si deduce che un vettore complesso è individuato da una coppia ordinata di numeri complessi, ma anche che questa coppia cambia al cambiare della base di riferimento (si vedrà in seguito di quale grande utilità sia la scelta opportuna della base stessa, quando si vogliono mettere in evidenza le proprietà dei vettori reali istantanei associati con i vettori complessi). Le relazioni che passano fra le componenti di un vettore in due basi ortonormali differenti si ottengono premoltiplicando scalarmente il vettore scritto nella vecchia base (ad esempio \hat{m}, \hat{n}) per il diadico unità relativo alla nuova base (ad esempio \hat{u}, \hat{v}). Si consideri, infatti, nella base ortonormale (\hat{u}, \hat{v}) , un vettore \overline{E} ; per definizione si ha

$$\overline{E} = E_u \hat{u} + E_v \hat{v}. \quad (\text{C.22})$$

Moltiplicando scalarmente la (C.22) per \hat{u}^* si ha

$$E_u = \overline{E} \cdot \hat{u}^*, \quad (\text{C.23})$$

mentre se la si moltiplica per \hat{v}^* si ottiene

$$E_v = \overline{E} \cdot \hat{v}^*. \quad (\text{C.24})$$

Le (C.23), (C.24) forniscono le componenti di \overline{E} nella base \hat{u}, \hat{v} . Peraltro, nella base ortonormale \hat{m}, \hat{n} si ha $\overline{E} = E_m \hat{m} + E_n \hat{n}$, per cui sostituendo quest'ultima espressione di \overline{E} nelle (C.23), (C.24) si ha

$$E_u = E_m \hat{m} \cdot \hat{u}^* + E_n \hat{n} \cdot \hat{u}^*, \quad (\text{C.25})$$

$$E_v = E_m \hat{m} \cdot \hat{v}^* + E_n \hat{n} \cdot \hat{v}^*, \quad (\text{C.26})$$

ovvero

$$\begin{aligned} E_u \hat{u} + E_v \hat{v} &= (E_m \hat{m} \cdot \hat{u}^* + E_n \hat{n} \cdot \hat{u}^*) \hat{u} + \\ &+ (E_m \hat{m} \cdot \hat{v}^* + E_n \hat{n} \cdot \hat{v}^*) \hat{v} = \\ &= (\hat{u} \hat{u}^* + \hat{v} \hat{v}^*) \cdot (E_m \hat{m} + E_n \hat{n}), \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

come volevasi dimostrare. Si può a questo punto osservare che, essendo le nuove componenti E_u, E_v funzioni lineari delle vecchie E_m, E_n , il rapporto E_v/E_u sarà una funzione bilineare del rapporto E_n/E_m ; si ha infatti

$$\frac{E_v}{E_u} = \frac{\hat{m} \cdot \hat{v}^* + \hat{n} \cdot \hat{v}^* \frac{E_n}{E_m}}{\hat{m} \cdot \hat{u}^* + \hat{n} \cdot \hat{u}^* \frac{E_n}{E_m}}. \quad (\text{C.28})$$

Nei sottoparagrafi seguenti le proprietà generali qui espone vengono utilizzate nello studio di alcuni casi di particolare interesse.

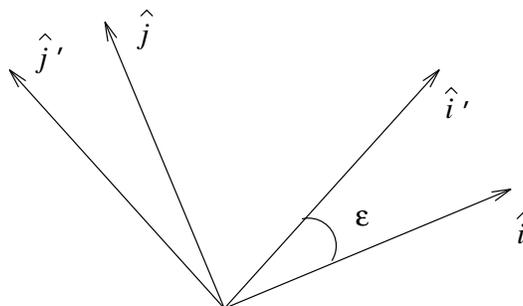


Figura C.1: Basi cartesiane $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ (perpendicolare al foglio) e $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}' = \hat{k}$.

C.3.1 Base \hat{i}_0, \hat{j}_0 e rapporto di polarizzazione p

Sia dato il vettore complesso ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ formano una base destrorsa)

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + j\bar{E}_2 = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} \quad (\text{C.29})$$

e si voglia riferirlo ad una nuova base cartesiana $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}' = \hat{k}$ (fig. C.1). Posto $\hat{m} = \hat{i}, \hat{n} = \hat{j}, \hat{u} = \hat{i}'$, $\hat{v} = \hat{j}'$, $E_m = E_x, E_n = E_y, E_u = E'_x, E_v = E'_y$, nelle (C.25), (C.26), tenendo presente che l'angolo di cui deve ruotare \hat{i} (il senso di rotazione corrispondente ad angoli positivi è antiorario per un osservatore situato in $z > 0$) per sovrapporsi a \hat{i}' è ε , si ha

$$E'_x = \cos \varepsilon E_x + \sin \varepsilon E_y, \quad (\text{C.30})$$

$$E'_y = -\sin \varepsilon E_x + \cos \varepsilon E_y. \quad (\text{C.31})$$

Posto (p =rapporto di polarizzazione)

$$p = j \frac{E_y}{E_x}, \quad (\text{C.32})$$

dalla (C.28) segue anche

$$p' = j \frac{E'_y}{E'_x} = \frac{p - j \operatorname{tg} \varepsilon}{1 - j p \operatorname{tg} \varepsilon}. \quad (\text{C.33})$$

Da quest'ultima si deduce che, se non è già $p = p^*$, cioè E_x ed E_y sfasati di $\pi/2$, dalla equazione in ε

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{j(p^* - p)}{1 - pp^*} = \frac{E_x E_y^* + E_x^* E_y}{E_x E_x^* - E_y^* E_y} \quad (\text{C.34})$$

è sempre possibile ricavare un angolo ε ($0 < \varepsilon < \pi/2$) per cui p' è uguale a p'^* , cioè E'_x ed E'_y sono sfasati di $\pi/2$. Di conseguenza esiste sicuramente una base cartesiana in cui si può scrivere

$$\bar{E} = (A' \hat{i}' + j B' \hat{j}') e^{j \gamma'}, \quad (\text{C.35})$$

con A', B' reali ed $A' > 0$. Nella base \hat{i}'', \hat{j}'' ruotata di $\pi/2$ rispetto alla \hat{i}', \hat{j}' , facendo ricorso alle (C.30), (C.31) e convenendo di usare i segni $+$ per $B' > 0$ ed i segni $-$ nel caso contrario, si ha invece

$$\bar{E} = (A'' \hat{i}'' + j B'' \hat{j}'') e^{j \gamma''} = (|B'| \hat{i}'' \pm j A' \hat{j}'') e^{j(\gamma' \pm \frac{\pi}{2})} \quad (\text{C.36})$$

per cui è evidente che o è $A' \geq |B'|$ oppure è $A'' \geq |B''|$. Si può pertanto concludere che esiste sempre (almeno) una base cartesiana \hat{i}_0, \hat{j}_0 in cui un vettore complesso \bar{E} si può scrivere

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + j \bar{E}_2 = (A \hat{i}_0 + j B \hat{j}_0) e^{j \gamma}, \quad (\text{C.37})$$

con A e B reali, $A > 0$ ed $A \geq |B|$. Per quanto riguarda il segno di B si può osservare che dalla (C.37) discende

$$\bar{E}_1 = A \cos \gamma \hat{i}_0 - B \operatorname{sen} \gamma \hat{j}_0, \quad (\text{C.38})$$

$$\bar{E}_2 = A \operatorname{sen} \gamma \hat{i}_0 + B \cos \gamma \hat{j}_0, \quad (\text{C.39})$$

dalle quali, a sua volta, si trae ($\hat{i}_0 \times \hat{j}_0 = -\hat{j}_0 \times \hat{i}_0 = \hat{k}$)

$$\bar{E}_1 \times \bar{E}_2 \cdot \hat{k} = AB, \quad (\text{C.40})$$

per cui, essendo $A > 0$, B è positivo se è

$$\bar{E}_1 \times \bar{E}_2 \cdot \hat{k} > 0 \quad (\text{C.41})$$

e negativo se è

$$\bar{E}_1 \times \bar{E}_2 \cdot \hat{k} < 0; \quad (\text{C.42})$$

infine B è nullo se è

$$\bar{E}_1 \times \bar{E}_2 \cdot \hat{k} = 0. \quad (\text{C.43})$$

Il segno di B è individuabile, oltre che dalle (C.41), (C.42), anche dal segno della parte reale di p . Infatti, posto

$$\bar{E}_1 = E_{1x} \hat{i} + E_{1y} \hat{j}, \quad (\text{C.44})$$

$$\bar{E}_2 = E_{2x} \hat{i} + E_{2y} \hat{j}, \quad (\text{C.45})$$

si ha

$$\bar{E}_1 \times \bar{E}_2 \cdot \hat{k} = E_{1x} E_{2y} - E_{1y} E_{2x}; \quad (\text{C.46})$$

d'altra parte, essendo $\bar{E} = \bar{E}_1 + j \bar{E}_2 = E_x \hat{i} + E_y \hat{j}$, si ha anche

$$E_x = E_{1x} + j E_{2x}, \quad (\text{C.47})$$

$$E_y = E_{1y} + j E_{2y}, \quad (\text{C.48})$$

per cui si può scrivere

$$\begin{aligned}\mathcal{R}e[p] &= \mathcal{R}e\left[j \frac{E_y}{E_x}\right] = \\ &= \mathcal{R}e\left[j \frac{E_{1y} + j E_{2y}}{E_{1x} + j E_{2x}}\right] = -\frac{E_{1x}E_{2y} - E_{1y}E_{2x}}{E_{1x}^2 + E_{2x}^2}.\end{aligned}\quad (\text{C.49})$$

Confrontando la (C.49) e la (C.46), si deduce che il prodotto misto ha segno opposto a quello della parte reale di p per cui si può concludere che tale prodotto è positivo se è

$$\mathcal{R}e[p] < 0, \quad (\text{C.50})$$

negativo se è

$$\mathcal{R}e[p] > 0; \quad (\text{C.51})$$

infine $\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \cdot \hat{k}$ è nullo se è

$$\mathcal{R}e[p] = 0. \quad (\text{C.52})$$

Nell'uso della (C.37) è utile conoscere

1. in funzione di $\overline{E}_1, \overline{E}_2$ le grandezze A, B ed il minimo angolo α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) di cui si deve ruotare \overline{E}_1 in verso orario (per un osservatore situato in $z > 0$) per renderlo parallelo ed equiverso ad \hat{i}_0 ; dalle (C.38), (C.39) si ha

$$\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_1 + \overline{E}_2 \cdot \overline{E}_2 = A^2 + B^2, \quad (\text{C.53})$$

$$\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_1 - \overline{E}_2 \cdot \overline{E}_2 = (A^2 - B^2) \cos 2\gamma, \quad (\text{C.54})$$

$$\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2 = \frac{1}{2} (A^2 - B^2) \sen 2\gamma, \quad (\text{C.55})$$

dalle quali discende

$$A = \left\{ \frac{1}{2} [\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_1 + \overline{E}_2 \cdot \overline{E}_2 + \sqrt{(\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_1 - \overline{E}_2 \cdot \overline{E}_2)^2 + 4 (\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2)^2}] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.56})$$

$$|B| = \left\{ \frac{1}{2} [\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_1 + \overline{E}_2 \cdot \overline{E}_2 - \sqrt{(\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_1 - \overline{E}_2 \cdot \overline{E}_2)^2 + 4 (\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2)^2}] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.57})$$

$$\text{tg } 2\gamma = \frac{2 \overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2}{\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_1 - \overline{E}_2 \cdot \overline{E}_2}; \quad (\text{C.58})$$

dalle soluzioni di quest'ultima si ottiene il valore di γ a meno di π , tenendo presente che $\cos 2\gamma$ deve essere, per la (C.54), dello stesso segno di $\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_1 - \overline{E}_2 \cdot \overline{E}_2$ e $\sen 2\gamma$ per la (C.55) dello stesso segno di $\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2$, dato che è $A^2 > B^2$. Per la (C.38) si ha allora

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{E}_1 \cdot \hat{j}_0}{\overline{E}_1 \cdot \hat{i}_0} = -\frac{B \sen \gamma}{A \cos \gamma} = -\frac{B}{A} \text{tg } \gamma, \quad (\text{C.59})$$

dalla quale, essendo γ noto (a meno di π) ed il segno di B uguale al segno di $\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \cdot \hat{k}$, si ottiene il valore desiderato di α ($0 \leq \alpha \leq \pi$).

2. in funzione delle componenti E_x, E_y di \bar{E} in una base arbitraria \hat{i}, \hat{j} le grandezze A, B ed il minimo angolo β ($0 \leq \beta \leq \pi$) di cui si deve ruotare in senso antiorario il versore \hat{i} per portarlo a coincidere con il versore \hat{i}_0 ; ponendo $\varepsilon = \beta$, $E'_x = A e^{j\gamma}$, $E'_y = jB e^{j\gamma}$ nelle (C.30) (C.31), si ha

$$A e^{j\gamma} = \cos \beta E_x + \operatorname{sen} \beta E_y, \quad (\text{C.60})$$

$$j B e^{j\gamma} = -\operatorname{sen} \beta E_x + \cos \beta E_y. \quad (\text{C.61})$$

ovvero

$$E_x = \cos \beta A e^{j\gamma} - j \operatorname{sen} \beta B e^{j\gamma}, \quad (\text{C.62})$$

$$E_y = \operatorname{sen} \beta A e^{j\gamma} + j \cos \beta B e^{j\gamma}. \quad (\text{C.63})$$

Da queste ultime si ricavano le relazioni

$$E_x E_x^* + E_y E_y^* = (A^2 + B^2), \quad (\text{C.64})$$

$$E_x E_x^* - E_y E_y^* = (A^2 - B^2) \cos 2\beta, \quad (\text{C.65})$$

$$\frac{1}{2} (E_x E_y^* + E_x^* E_y) = \frac{1}{2} (A^2 - B^2) \operatorname{sen} 2\beta, \quad (\text{C.66})$$

i cui secondi membri sono formalmente identici a quelli delle (C.53), (C.54), (C.55) cosicchè si ha

$$A = \left\{ \frac{1}{2} [E_x E_x^* + E_y E_y^* + \sqrt{(E_x E_x^* - E_y E_y^*)^2 + (E_x E_y^* + E_x^* E_y)^2}] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.67})$$

$$|B| = \left\{ \frac{1}{2} [E_x E_x^* + E_y E_y^* - \sqrt{(E_x E_x^* - E_y E_y^*)^2 + (E_x E_y^* + E_x^* E_y)^2}] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.68})$$

Il rapporto delle (C.66), (C.65) fornisce infine una equazione trigonometrica identica alla (C.34), come deve essere, perchè nel caso in questione ε coincide con β ; dalle due soluzioni comprese fra 0 e π di tale equazione si può ricavare l'angolo cercato β ($0 \leq \beta < \pi$) tenendo presente che, per la (C.65), $\cos 2\beta$ deve essere dello stesso segno di $E_x E_x^* - E_y E_y^*$ e che, per la (C.66), $\operatorname{sen} 2\beta$ deve essere dello stesso segno di $E_x E_y^* + E_x^* E_y$, dato che per ipotesi è $A^2 > B^2$.

C.3.2 Rapporto di polarizzazione circolare q

Si considerino i due vettori complessi

$$\hat{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} - j\hat{j}), \quad (\text{C.69})$$

$$\hat{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + j\hat{j}). \quad (\text{C.70})$$

Si verifica senza difficoltà che \hat{d} ed \hat{s} sono ortonormali; essi costituiscono quindi una possibile base per i vettori complessi che si stanno considerando, per cui si può scrivere

$$\bar{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} = E_d \hat{d} + E_s \hat{s}. \quad (\text{C.71})$$

I numeri complessi E_d, E_s sono le componenti del vettore complesso \bar{E} nella base ortonormale \hat{d}, \hat{s} . Ponendo $\hat{m} = \hat{i}, \hat{n} = \hat{j}, \hat{u} = \hat{d}, \hat{v} = \hat{s}, E_m = E_x, E_n = E_y, E_v = E_s, E_u = E_d$, nella (C.28) ed osservando che è $\hat{i} \cdot \hat{s}^* = \sqrt{\frac{1}{2}}, \hat{j} \cdot \hat{s}^* = -j \sqrt{\frac{1}{2}}, \hat{i} \cdot \hat{d}^* = \sqrt{\frac{1}{2}}, \hat{j} \cdot \hat{d}^* = j \sqrt{\frac{1}{2}}$ si ha

$$\frac{E_s}{E_d} = \frac{1 - j \frac{E_y}{E_x}}{1 + j \frac{E_y}{E_x}}. \quad (\text{C.72})$$

Posto ($q =$ rapporto di polarizzazione circolare)

$$q = \frac{E_s}{E_d}, \quad (\text{C.73})$$

per la (C.32) la (C.72) si scrive anche

$$q = \frac{1 - p}{1 + p}. \quad (\text{C.74})$$

Dallo studio della trasformazione bilineare (C.74) si deduce che

- la retta $\mathcal{Re}[p] = 0$ nel piano p si trasforma nel cerchio $|q| = 1$ nel piano q ;
- i punti per i quali è $\mathcal{Re}[p] > 0$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti per i quali è $|q| < 1$;
- i punti per i quali è $\mathcal{Re}[p] < 0$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti per i quali è $|q| > 1$.

Per le (C.50), (C.51) e (C.52) si può allora affermare che B è positivo se è

$$|q| > 1, \quad (\text{C.75})$$

negativo se è

$$|q| < 1, \quad (\text{C.76})$$

nullo se è

$$|q| = 1. \quad (\text{C.77})$$

Se da una base \hat{i}, \hat{j} si passa ad una base \hat{i}', \hat{j}' i versori \hat{d}, \hat{s} vengono sostituiti dai versori $\hat{d}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}' - j \hat{j}')$, $\hat{s}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}' + j \hat{j}')$. Indicato con ε l'angolo compreso fra \hat{i} ed \hat{i}' , dalla (C.28) con $\hat{m} = \hat{d}, \hat{n} = \hat{s}, \hat{u} = \hat{d}', \hat{v} = \hat{s}'$ si ha

$$q' = \frac{E'_s}{E'_d} = \frac{e^{j\varepsilon} \frac{E_s}{E_d}}{e^{-j\varepsilon}}, \quad (\text{C.78})$$

ovvero

$$q' = q e^{j2\varepsilon}, \quad (\text{C.79})$$

dalla quale segue che il rapporto fra E_s ed E_d si mantiene costante in modulo al ruotare di \hat{i} e \hat{j} , mentre varia il suo argomento. Nella base \hat{i}_0, \hat{j}_0 essendo $p_0 = j(E_{y0}/E_{x0})$ si ha

$$q_0 = \frac{1 + \frac{B}{A}}{1 - \frac{B}{A}}, \quad (\text{C.80})$$

cioè q_0 è reale, positivo (si ricordi che è $A > 0$ e $A \geq |B|$); ricavando $A/|B|$ dalla (C.80) e tenendo presente che è $|q| = |q_0| = q_0$ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{A}{|B|} &= \left| \frac{1 + q_0}{1 - q_0} \right| = \left| \frac{1 + |q_0|}{1 - |q_0|} \right| = \\ &= \left| \frac{1 + |q|}{1 - |q|} \right| = \left| \frac{|E_d| + |E_s|}{|E_d| - |E_s|} \right|. \end{aligned} \quad (\text{C.81})$$

La (C.81) è una espressione del rapporto $A/|B|$ più semplice di quelle che si possono ottenere dalle (C.56) (C.57); da essa si deduce che i cerchi $|q| = \text{costante}$ nel piano q sono luogo dei punti che rappresentano vettori complessi aventi lo stesso valore di $A/|B|$. Si deve notare a tale proposito che per un assegnato rapporto $A/|B|$ vi sono due cerchi che gli corrispondono, l'uno con $|q| = |q_1| < 1$, l'altro con $|q| = |q_2| > 1$, essendo $|q_1| = 1/|q_2|$. Anche l'angolo β assume una espressione molto semplice in funzione degli argomenti $\lfloor E_s, \lfloor E_d$ di E_s ed E_d ; dalla (C.79) si ha infatti, quando è $\hat{i}' = \hat{i}_0$, $\hat{j}' = \hat{j}_0$, $\varepsilon = \beta$

$$q_0 = |q_0| = q e^{j 2\beta} = q_0 e^{j(\lfloor E_s - \lfloor E_d)} e^{j 2\beta}, \quad (\text{C.82})$$

dalle quali si trae

$$\beta = -\frac{\lfloor q}{2} + k\pi = -\frac{\lfloor E_s - \lfloor E_d}{2} + k\pi, \quad (\text{C.83})$$

essendo k un intero tale che sia $0 \leq \beta < \pi$. Poichè nel piano q le curve ad argomento di q costante sono le semirette uscenti dall'origine, si può dire che queste ultime sono luogo dei punti che rappresentano vettori complessi aventi tutti lo stesso angolo β . Si è ripetutamente fatto notare che lo scrivere il vettore \bar{E} nella base \hat{d}, \hat{s} , è da preferire rispetto alle altre rappresentazioni considerate, per la semplicità delle formule; l'utilità della scelta di tale base è ancora preminente nella trattazione dei problemi che verranno affrontati nel prossimo paragrafo, per cui in esso il vettore verrà considerato solo in tale base.

C.4 Vettori complessi paralleli ed ortogonali

Due vettori complessi \bar{E} ed \bar{F} si dicono paralleli quando si può scrivere

$$\bar{E} = c\bar{F}, \quad (\text{C.84})$$

con c opportuno numero complesso. Nella base \hat{d}, \hat{s} si ha allora

$$E_d \hat{d} + E_s \hat{s} = c F_d \hat{d} + c F_s \hat{s}, \quad (\text{C.85})$$

per cui è

$$\frac{E_s}{E_d} = \frac{F_s}{F_d} = q, \quad (\text{C.86})$$

cioè i due vettori sono rappresentati dallo stesso punto nel piano q e, di conseguenza, hanno lo stesso segno di $\bar{E}_1 \times \bar{E}_2 \cdot \hat{k}$, lo stesso rapporto $A/|B|$ e lo stesso angolo β . Si passa ora a dimostrare che dati due vettori complessi \bar{E}, \bar{F} , la norma del prodotto scalare $\bar{E} \cdot \bar{F}^*$, per valori dei moduli di \bar{E} ed \bar{F} costanti, diviene massima quando i due vettori sono paralleli. Sviluppando la forma hermitiana

$$\|C_1^* \ C_2^*\| \left\| \begin{array}{cc} \bar{E} \cdot \bar{E}^* & \bar{E}^* \cdot \bar{F} \\ \bar{E} \cdot \bar{F}^* & \bar{F} \cdot \bar{F}^* \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \right\|, \quad (\text{C.87})$$

si ha che essa è uguale a

$$(C_1 \bar{E} + C_2 \bar{F}) \cdot (C_1 \bar{E} + C_2 \bar{F})^*, \quad (\text{C.88})$$

per cui, se non è

$$C_1 \bar{E} + C_2 \bar{F} = 0, \quad (\text{C.89})$$

la forma è definita positiva. E' noto che condizione necessaria perchè ciò sia verificato è che il determinante della matrice della forma sia maggiore di zero, per cui si può scrivere

$$(\bar{E} \cdot \bar{E}^*)(\bar{F} \cdot \bar{F}^*) > (\bar{E}^* \cdot \bar{F})(\bar{E} \cdot \bar{F}^*). \quad (\text{C.90})$$

D'altra parte perchè la (C.89) possa essere soddisfatta, è necessario che \bar{E} ed \bar{F} siano paralleli, per cui la (C.90) vale quando ciò non è verificato. Se \bar{E} ed \bar{F} sono paralleli la forma è semidefinita positiva ed

è noto che condizione necessaria perchè ciò avvenga è che il determinante della sua matrice sia nullo, cioè che sia

$$(\overline{E} \cdot \overline{E}^*)(\overline{F} \cdot \overline{F}^*) = (\overline{E}^* \cdot \overline{F})(\overline{E}^* \cdot \overline{F})^*. \quad (\text{C.91})$$

in definitiva, si ha (disuguaglianza di Schwarz)

$$(\overline{E} \cdot \overline{E}^*)(\overline{F} \cdot \overline{F}^*) \geq (\overline{E}^* \cdot \overline{F})(\overline{E}^* \cdot \overline{F})^*, \quad (\text{C.92})$$

con il segno di uguale valido se e solo se i vettori \overline{E} ed \overline{F} sono paralleli; ne viene, per l'appunto, che il massimo di $(\overline{E} \cdot \overline{F}^*)(\overline{E} \cdot \overline{F}^*)$ a $\overline{E} \cdot \overline{E}^*$ ed $\overline{F} \cdot \overline{F}^*$ costanti si ha quando \overline{E} ed \overline{F} sono paralleli. Infine due vettori complessi \overline{E} , \overline{F} si dicono ortogonali se è (si veda (C.20))

$$\overline{E} \cdot \overline{F}^* = 0. \quad (\text{C.93})$$

Scrivendo ancora i vettori nella base ortonormale \hat{d} , \hat{s} , dalla (C.93) discende

$$(E_d \hat{d} + E_s \hat{s}) \cdot (F_d^* \hat{d}^* + F_s^* \hat{s}^*) = E_d F_d^* + E_s F_s^* = 0, \quad (\text{C.94})$$

dalla quale viene anche

$$\frac{E_s}{E_d} = -\frac{F_d^*}{F_s^*}. \quad (\text{C.95})$$

Quest'ultima permette di scrivere

$$|q(\overline{E})| = \left| \frac{E_s}{E_d} \right| = \left| \frac{F_d^*}{F_s^*} \right| = \frac{1}{|q(\overline{F})|}, \quad (\text{C.96})$$

$$\begin{aligned} \frac{|q(\overline{E})|}{2} &= \frac{|E_s - |E_d|}{2} = \\ &= \frac{|F_s^* - |F_d^*|}{2} + (2k+1)\frac{\pi}{2} = \frac{|q(\overline{F})|}{2} + (2K+1)\frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (\text{C.97})$$

dalle quali risulta che \overline{E} ed \overline{F} hanno $\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \cdot \hat{k}$ ed $\overline{F}_1 \times \overline{F}_2 \cdot \hat{k}$ di segni opposti, lo stesso rapporto $A/|B|$ ed angoli β che differiscono di $\pi/2$.

C.5 Vettori complessi tridimensionali

Quando si ha a che fare con un solo vettore complesso $\overline{E} = \overline{E}_1 + j\overline{E}_2$, è sempre possibile porsi nella situazione sinora considerata, cioè scegliere il piano $z = 0$ coincidente con il piano individuato da \overline{E}_1 , \overline{E}_2 ; ciò non è più vero quando i vettori complessi sono due o più con vettori reali non complanari. Si consideri allora il prodotto scalare di due vettori \overline{E} ed \overline{F} qualsiasi. Il modo di procedere è immediato: scelto il piano $z = 0$ coincidente con il piano individuato dai vettori reali associati con uno dei due vettori complessi, ad esempio \overline{E} , si può scrivere

$$\overline{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j}, \quad (\text{C.98})$$

$$\overline{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = \overline{F}_t + F_z \hat{k}, \quad (\text{C.99})$$

per cui tenendo presente che è $\hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$, tutto quanto si è detto per il prodotto scalare di due vettori è ancora valido se si considerano \overline{E} ed \overline{F}_t .

C.6 Vettori istantanei reali

Il vettore istantaneo reale e sinusoidale $\overline{E}_{\sim}(t)$ associato con il vettore complesso \overline{E} si ottiene dalla (C.15) che qui si riscrive

$$\overline{E}_{\sim}(t) = \frac{\overline{E} e^{j\omega t} + \overline{E}^* e^{-j\omega t}}{2} = \mathcal{R}e [\overline{E} e^{j\omega t}]. \quad (\text{C.100})$$

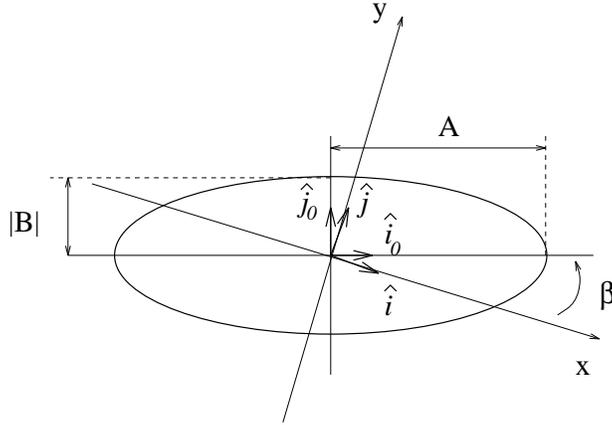


Figura C.2: Ellisse descritta dall'estremo del vettore istantaneo \overline{E}_{\sim} .

Esprimendo \overline{E} come nella (C.37), cioè scegliendo come base di riferimento \hat{i}_0, \hat{j}_0 , si ha

$$\overline{E}_{\sim} = E_{\sim x} \hat{i}_0 + E_{\sim y} \hat{j}_0 = A \cos(\omega t + \gamma) \hat{i}_0 - B \sin(\omega t + \gamma) \hat{j}_0, \quad (\text{C.101})$$

dalla quale discende

$$\left(\frac{E_{\sim x}}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_{\sim y}}{B}\right)^2 = 1, \quad (\text{C.102})$$

che è l'equazione di un'ellisse riferita ai suoi assi, avente l'asse maggiore parallelo ad \hat{i}_0 . Pertanto l'estremo del vettore istantaneo \overline{E}_{\sim} descrive, al variare di t , una ellisse avente un rapporto fra gli assi uguale ad $A/|B|$ ed il cui asse maggiore è inclinato di un angolo β rispetto all'asse x (fig. C.2). Quando vale la (C.102) il vettore \overline{E}_{\sim} viene detto polarizzato ellitticamente. Rimane ora da vedere il senso di rotazione del vettore istantaneo \overline{E}_{\sim} . A tale proposito è necessario fissare una direzione orientata di riferimento, che qui si supporrà individuata dal versore \hat{k} della terna destrorsa $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, (nella tecnica, quando è possibile, si sceglie di solito \hat{k} coincidente con il versore relativo alla normale d'onda, orientata nel verso della propagazione). Si dirà che la polarizzazione ellittica di \overline{E}_{\sim} è destrorsa

Tabella 1		
Polarizzazione ellittica destrorsa	Polarizzazione rettilinea	Polarizzazione ellittica sinistrorsa
$B < 0$	$B = 0$	$B > 0$
$\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \cdot \hat{k} < 0$	$\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \cdot \hat{k} = 0$	$\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \cdot \hat{k} > 0$
$\mathcal{R}e[p] > 0$	$\mathcal{R}e[p] = 0$	$\mathcal{R}e[p] < 0$
$ q < 1$	$ q = 1$	$ q > 1$

Tabella C.1: Criteri per individuare la polarizzazione del campo elettromagnetico istantaneo.

se \overline{E}_\sim ruota come il manico di un cavatappi destrorso, quando la vite di quest'ultimo avanza secondo \hat{k} , sinistrorsa nel caso opposto ¹. Per stabilire se un vettore \overline{E}_\sim è polarizzato destrorso o sinistrorso basta considerare istante per istante l'angolo δ fra \overline{E}_\sim ed \hat{i}_0 : se esso è crescente con t la polarizzazione è destrorsa, se decrescente con t , sinistrorsa. Si ha, per la (C.101),

$$tg \delta = \frac{\overline{E}_\sim \cdot \hat{j}_0}{\overline{E}_\sim \cdot \hat{i}_0} = -\frac{B}{A} tg(\omega t + \gamma), \quad (C.103)$$

dalla quale si deduce

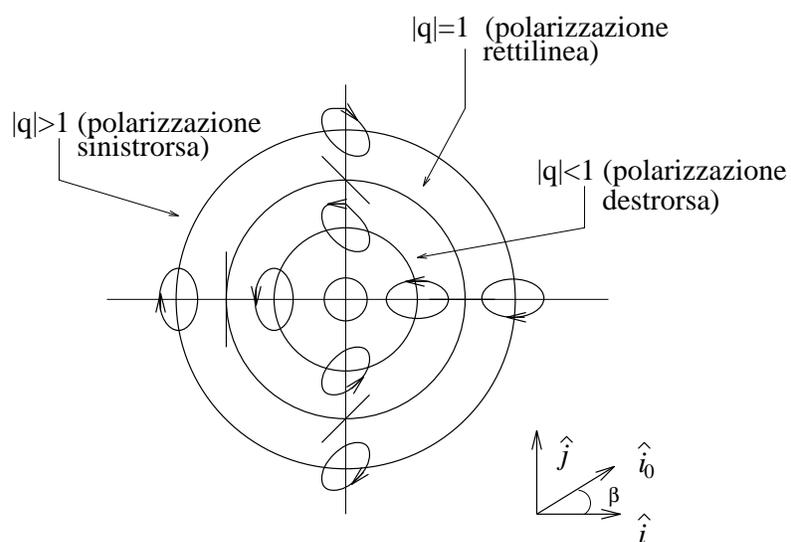
$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{B}{A} \frac{\omega}{\cos^2(\omega t + \gamma) + \left(\frac{B}{A}\right)^2 \sin^2(\omega t + \gamma)}, \quad (C.104)$$

perciò la polarizzazione ellittica è destrorsa se B è negativo, sinistrorsa se B è positivo. Se B è uguale a zero la polarizzazione è rettilinea. Da quanto ora verificato e da ciò che si è detto a suo tempo in C.3.1, C.3.2 (si vedano le (C.41) (C.42) (C.43), le (C.50) (C.51) (C.52) e le (C.75) (C.76) (C.77)) si può ricavare la Tabella C.1. Si può notare che il coniugato $\overline{F}^* = \overline{F}'_1 + j\overline{F}'_2 = \overline{F}_1 - j\overline{F}_2$, di un vettore complesso $\overline{F} = \overline{F}_1 + j\overline{F}_2$ differisce da quest'ultimo solo per i segni di $\overline{F}_1 \times \overline{F}_2 \cdot \hat{k}$ e di $\overline{F}'_1 \times \overline{F}'_2 \cdot \hat{k}$, ragione per cui i due corrispondenti vettori istantanei \overline{F}'_\sim ed \overline{F}_\sim , differiscono fra loro solo per il senso di polarizzazione (se uno è destrorso l'altro è sinistrorso). Dalla (C.104) segue che la velocità di rotazione del vettore \overline{E}_\sim non è uniforme, se non nel caso di $A = |B|$. Questo è un caso di particolare interesse dato che l'ellisse, come si deduce dalla (C.102), diviene una circonferenza e la polarizzazione viene detta circolare, destrorsa o sinistrorsa a seconda del segno di B . Dalle espressioni (C.69), (C.70) dei versori \hat{d} ed \hat{s} si vede che i vettori istantanei relativi a tali vettori complessi sono due vettori a polarizzazione circolare l'uno destrorso (quello corrispondente a \hat{d}) l'altro sinistrorso (corrispondente ad \hat{s}). Poichè i vettori reali corrispondenti ad \hat{i} e a \hat{j} sono polarizzati linearmente, si può affermare che, per quanto si è visto in C.3.1, C.3.2, un vettore istantaneo può essere espresso come somma di due vettori istantanei polarizzati rettilineamente secondo direzioni ortogonali o come somma di due vettori istantanei polarizzati circolarmente, l'uno destrorso l'altro sinistrorso, sempre che si scelgano opportunamente le ampiezze e le fasi dei vettori componenti suddetti. Si può ancora notare che, per la (C.80), quando è $A = |B|$ si ha $|q| = q_0 = 0$ se è $B < 0$ (polarizzazione circolare destrorsa) e $|q| = q_0 = \infty$ se è $B > 0$ (polarizzazione circolare sinistrorsa). Dalla (C.74) discende allora che per $p = 1$ si ha polarizzazione circolare destrorsa e per $p = -1$ polarizzazione circolare sinistrorsa.

Dalla (C.86) segue inoltre che, se due vettori complessi sono paralleli, i corrispondenti vettori reali sono polarizzati ellitticamente nello stesso verso, hanno lo stesso rapporto fra gli assi e gli assi maggiori paralleli (in particolare, se le polarizzazioni sono rettilinee la direzione di polarizzazione è la stessa) Dalle (C.96), (C.97) si ha invece che se due vettori complessi sono ortogonali i corrispondenti vettori reali sono polarizzati uno destrorso, l'altro sinistrorso, i rapporti fra gli assi sono uguali e gli assi

¹Si tenga presente che la polarizzazione delle intensità $\overline{E}_\sim(P)$ di un campo vettoriale varia in generale da punto a punto e che perciò quando si parla di polarizzazione dell'intensità \overline{E}_\sim è in generale necessario precisare a quale punto P dello spazio ci si riferisce.

maggiori sono ortogonali (in particolare, se le polarizzazioni sono rettilinee le direzioni di polarizzazione sono ortogonali). Infine, da quanto si è detto in C.5 si deduce che se due vettori complessi \bar{E} ed \bar{F} sono tali che i loro vettori reali non sono complanari, si può scomporre uno di essi ($\bar{F} = \bar{F}_t + F_s \hat{k}$) in modo che il vettore istantaneo relativo sia la somma di due vettori, l'uno polarizzato rettilineamente o ellitticamente nel piano di \bar{E} e l'altro polarizzato rettilineamente secondo la normale a tale piano. È evidente che i vettori \bar{E} ed \bar{F} ora considerati non possono mai essere paralleli, mentre sono ortogonali se lo sono \bar{E} ed \bar{F}_t . In fig. C.3, è infine mostrato come nel piano q si possono rappresentare l'orientamento e la forma dell'ellisse di polarizzazione, nonché il verso di polarizzazione, in base a quanto si è detto in C.3.2.

Figura C.3: Rappresentazione nel piano q delle caratteristiche della polarizzazione.

Bibliografia

- [1] M. Bouix - Les fonctions gènèralisèes ou distributions - Masson, 1964
- [2] G. C. Corazza, C. G. Someda - Elementi di calcolo vettoriale e tensoriale - Pitagora, 1982
- [3] S. A. Schelkunoff - Electromagnetic Waves - Van Nostrand, 1943
- [4] C.G. Someda - Onde Elettromagnetiche - UTET, 1986
- [5] J. Van Bladel, - Singular Electromagnetic Fields and Sources - Clarendon Press, 1991
- [6] G.C. Corazza - Fondamenti di campi elettromagnetici e circuiti - Pàtron, Bologna

Elenco delle figure

2.1	Significato fisico del flusso del vettore di Poynting.	10
4.1	Spira percorsa da corrente costante.	29
4.2	Calcolo della potenza complessa erogata da una sorgente elettrica superficiale.	42
4.3	Oscillatore di Hertz.	48
5.1	V interno ad S	54
5.2	V esterno ad S	54
5.3	Discontinuità delle intensità di campo dovute a $\bar{J}_S(Q)$	58
5.4	Discontinuità delle intensità di campo dovute a $\bar{M}_S(Q)$	58
6.1	Superficie chiusa di riferimento.	60
6.2	$\bar{J}_2 = \bar{M}_2 = 0$	60
6.3	$\bar{J}_1 = \bar{M}_1 = 0$	62
6.4	Correnti equivalenti a \bar{J}_1, \bar{M}_1	62
6.5	Correnti equivalenti a \bar{J}_2, \bar{M}_2	63
6.6	Correnti assorbenti per \bar{J}_1, \bar{M}_1	63
6.7	Correnti assorbenti per \bar{J}_2, \bar{M}_2	64
6.8	Campo di \bar{J}_1, \bar{M}_1 in presenza delle relative correnti assorbenti.	64
6.9	Teorema di equivalenza per $P \in V_\infty \setminus V$	65
6.10	Teorema di equivalenza per $P \in V \setminus S$	66
6.11	Mezzo in cui i generatori \bar{J}, \bar{M} sostengono il campo incidente, \bar{E}^i, \bar{H}^i , noto.	67
6.12	Mezzo in cui i generatori \bar{J}, \bar{M} sostengono il campo \bar{E}, \bar{H} , incognito.	68
7.1	Imposizione della condizione al contorno $\hat{n} \times \bar{E}(Q) \times \hat{n}$	73
7.2	Situazione con mezzo di conducibilità γ nel semispazio $z > 0$	75
A.1	Supporto della distribuzione δ_l	81
A.2	Supporto della distribuzione δ_S	82
A.3	Supporto della distribuzione U_V	83
B.1	Simboli e convenzioni adottate per domini di volume.	90
B.2	Simboli e convenzioni adottate per domini di superficie.	90
B.3	Simboli e convenzioni adottate per domini di linea.	91
B.4	Insieme τ contenente il punto P	91
B.5	Dominio utilizzato per la risoluzione dell'equazione di Poisson e per la dimostrazione del teorema di Helmholtz.	93
B.6	Dominio utilizzato per ricavare l'espressione della divergenza in coordinate laminari.	97
B.7	Dominio utilizzato per ricavare l'espressione della divergenza in coordinate tubolari.	101
B.8	Insieme τ interno a V	108
B.9	Insieme τ esterno a V	109

B.10	Insieme aperto contenente S .	110
B.11	Insieme aperto contenente \mathcal{C} .	111
C.1	Basi cartesiane $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ (perpendicolare al foglio) e $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}' = \hat{k}$.	116
C.2	Ellisse descritta dall'estremo del vettore istantaneo \vec{E}_\sim .	123
C.3	Rappresentazione nel piano q delle caratteristiche della polarizzazione.	124

Indice

Prefazione	iii
1 Modelli matematici e fenomeni fisici	1
1.1 Uso di modelli matematici nello studio di fenomeni fisici	1
2 Campi elettromagnetici variabili nel tempo	3
2.1 Campi elettromagnetici variabili comunque nel tempo	3
2.2 Equazioni di Maxwell	5
2.3 Equazioni di Maxwell nel vuoto	7
2.4 Equazione delle onde	8
2.5 Teorema di Poynting	8
2.6 Teorema di unicità in una regione limitata	11
3 Campi elettromagnetici variabili sinusoidalmente nel tempo	13
3.1 Equazioni di Maxwell per i vettori complessi	13
3.2 Equazioni di Helmholtz	15
3.3 Teorema di Poynting per i vettori complessi	15
3.4 Teorema di unicità per il campo e. m. complesso	18
3.5 Correnti volumetriche equivalenti	20
4 Campi elettromagnetici come distribuzioni	23
4.1 Introduzione	23
4.2 Equazioni di Maxwell per le distribuzioni	24
4.3 Equazioni di continuità per le distribuzioni	25
4.4 Potenziali vettori	26
4.5 Principio di dualità	27
4.6 Equivalenza di sorgenti elettriche e magnetiche	28
4.7 Le intensità di campo $\overline{E}(P)$, $\overline{H}(P)$	30
4.8 Sorgenti di campo elettromagnetico	33
4.8.1 Sorgenti puntiformi	33
4.8.2 Correnti volumetriche	36
4.8.3 Correnti superficiali	37
4.8.4 Correnti lineari	37
4.8.5 Caso generale	38
4.9 Correnti superficiali e lineari	39
4.10 Teorema di Poynting generalizzato	41
4.11 Teorema di unicità generalizzato	45
4.12 Densità di carica elettrica e magnetica	45
4.12.1 Cariche volumetriche	45
4.12.2 Cariche superficiali	46
4.12.3 Cariche lineari	47

4.12.4	Sorgente puntiforme	48
4.12.5	Caso generale	49
4.13	Potenziali scalari	50
5	Discontinuità delle intensità di campo	53
5.1	Discontinuità [5] delle intensità di campo attraverso una superficie	53
5.1.1	Discontinuità del componente tangente	56
5.1.2	Discontinuità del componente normale	56
6	Teoremi di equivalenza e di induzione	59
6.1	Correnti superficiali equivalenti. Correnti superficiali assorbenti	59
6.2	Teorema di equivalenza	61
6.3	Mezzo disomogeneo	66
6.4	Teorema di induzione	67
7	Conduttori perfetti	71
7.1	Intensità del campo elettromagnetico in una regione limitata	71
7.2	Conduttori perfetti	71
7.2.1	Conduttore elettrico perfetto	72
7.2.2	Conduttore magnetico perfetto	72
7.2.3	Correnti superficiali impresse in prossimità di conduttori perfetti	73
7.2.4	Teoremi di Thévenin e di Norton	74
7.3	Effetto pelle	74
7.4	Principio delle immagini	76
	Repetita iuvant	77
A	Distribuzioni	79
A.1	Introduzione	79
A.2	Distribuzioni scalari	79
A.2.1	Spazio delle funzioni di prova	79
A.2.2	Supporto di una funzione di prova	79
A.2.3	Successione convergente in F	79
A.2.4	Funzionale	80
A.2.5	Funzionale lineare	80
A.2.6	Funzionale continuo nello spazio F	80
A.2.7	Sottospazio F_k	80
A.2.8	Distribuzione o funzione generalizzata scalare	80
A.2.9	Somma di due distribuzioni	80
A.2.10	Prodotto di una distribuzione per uno scalare costante	80
A.2.11	Uguaglianza di distribuzioni	80
A.2.12	Distribuzione generata da una funzione localmente sommabile	81
A.2.13	Distribuzioni di Dirac	81
A.2.14	Distribuzione di Heaviside U_V , per un volume V	82
A.2.15	Prodotto di una distribuzione per una funzione di punto	82
A.2.16	Distribuzione localmente nulla e supporto di una distribuzione	83
A.2.17	Valore locale di una distribuzione in un punto	83
A.2.18	Derivata di una distribuzione	84
A.3	Distribuzioni vettoriali	85
A.4	Equazioni nel senso delle distribuzioni	85

B	Calcolo vettoriale	89
B.1	Introduzione	89
B.2	Calcolo vettoriale per le funzioni ordinarie	89
B.2.1	Operatori gradiente, divergenza e rotore nello spazio tridimensionale	91
B.2.2	Alcune importanti relazioni vettoriali	92
B.2.3	Operatori gradiente, divergenza e rotore in coordinate laminari	96
B.2.4	Operatori gradiente, divergenza e rotore in coordinate tubolari	101
B.3	Calcolo vettoriale per le funzioni generalizzate	104
B.3.1	Operatori differenziali. Definizioni	104
B.3.2	Applicazione al prodotto di una distribuzione per una funzione di punto	105
B.3.3	Applicazioni	107
B.3.4	Alcuni casi particolari	107
C	Vettori complessi e vettori variabili sinusoidalmente nel tempo	113
C.1	Campi vettoriali sinusoidali	113
C.2	Vettori complessi e vettori sinusoidali	114
C.3	Proprietà dei vettori complessi	114
C.3.1	Base \hat{i}_0, \hat{j}_0 e rapporto di polarizzazione p	116
C.3.2	Rapporto di polarizzazione circolare q	119
C.4	Vettori complessi paralleli ed ortogonali	121
C.5	Vettori complessi tridimensionali	122
C.6	Vettori istantanei reali	122

Indice analitico

C

calcolo vettoriale, 89
campo elettrico, 23
carica elettrica, 3
cariche lineari, 47
cariche superficiali, 46
cariche volumetriche, 45
condizione di Lorentz, 26
condizioni ai limiti, 11
condizioni al contorno, 11
condizioni iniziali, 11
corrente impressa, 4
correnti assorbenti, 61
correnti lineari, 37
correnti superficiali, 37
correnti superficiali equivalenti, 61
correnti volumetriche, 36

D

discontinuità del componente
normale del campo magnetico, 57
discontinuità del componente
tangente del campo elettrico, 56
discontinuità del componente
tangente del campo magnetico, 56
discontinuità del componente
normale del campo elettrico, 57

E

effetto pelle, 74
equazione delle onde, 8
equazione di continuità, 7
equazione di Helmholtz, 15
equazioni di continuità
per le distribuzioni, 25
equazioni di Maxwell, 5
equazioni di Maxwell
per i vettori complessi, 14
equivalenza fra generatori
elettrici e magnetici, 29

F

forza di Lorentz, 3

I

induzione magnetica, 3
intensità di campo $\overline{E}(P)$, $\overline{H}(P)$, 30
intensità di campo elettrico, 3

O

oscillatore di Hertz, 47

P

permeabilità, 7
permittività, 7
potenziale scalare elettrico, 26
potenziale scalare magnetico, 27
potenziale vettore elettrico, 27
potenziale vettore magnetico, 26
potenziali scalari, 50
principio delle immagini, 76
principio di dualità, 27

S

sorgente, 5
sorgente puntiforme, 48
sorgenti puntiformi, 33

T

teorema di equivalenza, 66
teorema di induzione, 69
teorema di Poynting, 8, 9
teorema di Poynting
per i vettori complessi, 16
teoremi di Thévenin e di Norton, 74

U

utilizzatore, 5

V

valori locali delle distribuzioni \overline{E} e \overline{H} , 25
vettore di Poynting, 10